Kommentar zu Musils Trigonometrischen Formeln

Musil verwendet für die trigonometrischen Funktionen teilweise eine heute nicht mehr gebräuchliche Schreibweise. In der folgenden Tabelle wird die Korrespondenz der von Musil verwendeten Notation mit der heuten in der Mathematik üblichen angegeben. In diesem Kommentar werden die heute üblichen Notationen auf alle im Registerheft enthaltenen Formeln angewendet. Es werden also stets $\operatorname{tg} p$ durch $\tan p$ und $\operatorname{ctg} p$ durch $\cot p$ ersetzt. Dabei können an die Stelle der Variablen p andere Variablen treten z. B. x oder u.

Tabelle 2: Musils und die heute übliche Notation

Notation nach Musil	Übliche Notation
$\operatorname{tg} p$, gelegentlich auch $\operatorname{tang} p$	$\tan p$
$\operatorname{ctg} p$	$\cot p$

Neben den üblichen trigonometrischen Funktionen betrachtet Musil auch die heute weniger gebräuchlichen Funktionen, vgl. »*Bronstein*«, S. 78, (2.70) und (2.71).

$$\sec p := \frac{1}{\cos p} \quad \text{gesprochen „secans } p\text{“}$$
$$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sin p} \quad \text{gesprochen „cosecans } p\text{“}$$

Ungebräuchlich sind die beiden folgenden Funktionen, deren Definition dem Internet (vgl. E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/Versine.html und http://mathworld.wolfram.com/Coversine.html) entnommen wurden .

$$\sin\operatorname{vers} p := 1 - \cos p \qquad \text{Definition (1)}$$
$$\cos\operatorname{vers} p := 1 - \sin p \qquad \text{Definition (2)}$$

Bei Weisstein werden diese Funktionen mit versin und coversin bezeichnet. In diesem Kommentar wird die Schreibweise Musils beibehalten.

Die von Musil notierten trigonometrischen Formeln lassen sich in folgende Gruppen einteilen:

- Darstellung einer Winkelfunktion durch andere Winkelfunktionen (z.B. $\sin p$ durch $\cos p$, $\tan p$, $\cot p$, $\sec p$ und $\operatorname{cosec} p$, vgl. (T-4).
- Bekannte Umrechnungsformeln wie Additionstheoreme [(T-30) mit (T-35)], Halbwinkelfunktionen [(T-12) und (T-13)], Winkelfunktionen des Vielfachen Arguments [(T-26) und (T-27)], Potenzen der Winkelfunktionen [(T-24) und (T-25)], Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten) [(T-40) mit (T-46)].
- Sonstige Formeln.

Der Kommentar zu den trigonometrischen Formeln wird in zwei Unterabschnitte gegliedert:

1. **Darstellungsformeln**
2. **Umrechnungs- und sonstige Formeln**

Dies ist erforderlich, weil Musil die Umrechnungs- und sonstigen Formeln nicht streng nach einander anordnet.

Sofern die von Musil notierten trigonometrischen Formeln sich direkt in »*Bronstein*« finden, werden die Fundstellen wie oben angegeben. Sofern sie sich nicht in »*Bronstein*« finden, werden sie abgeleitet oder verifiziert. Dafür werden die folgenden Hilfsformeln benötigt, die sich alle in »*Bronstein*« , S. 79 - 81finden.

$$\sin^2 p + \cos^2 p = 1 \qquad \text{(TH-1)}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(TH-2)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(TH-3)}$$

Dabei werden die Winkel α und β mit den von Musil verwendeten identifiziert. Weiter wird häufig das Wertepaar (vgl. »*Bronstein*«, s. 79, Tabelle 2.3) benötigt

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(TH-4)}$$

1. Darstellungsformeln

<u>Formel (T-1)$_1$:</u> »*Bronstein*«, S. 80, (2.82)

<u>Formel (T-1)$_2$</u><u>:</u> »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

<u>Formel (T-1)$_3$:</u> »*Bronstein*«, S. 78, (2.70)

<u>Formel (T-2)$_1$</u><u>:</u> Durch Umstellen von »*Bronstein*«, S. 78, (2.71)

<u>Formel (T-2)$_2$</u><u>:</u> »*Bronstein*«, S. 80, (2.83)

<u>Formel (T-2)$_3$</u><u>:</u> »*Bronstein*«, S. 80, (2.84)

<u>Formel (T-3)$_1$</u>: Durch Umstellen der Definition (1) (vgl. oben)

<u>Formel (T-3)$_2$:</u> Durch Umstellen der Definition (2)

<u>Formeln (T-4)</u><u>:</u> Hier wird die trigonometrische Funktion $\sin p$ durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. Die ersten drei Umformungen können *Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, erste Zeile entnommen werden. Die

$$\sin p = \sqrt{1-\cos^2 p} = \sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 p}} = \frac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p}$$

Dabei wurde bei der zweiten Umformung von (T-1)$_3$ Gebrauch gemacht. Die Beziehung

$$\sin p = \cos p \tan p$$

ist eine Umstellung der Gleichung»*Bronstein*,« S. 80, (2.88). Aus ihr ergibt sich die wichtige Hilfsformel

$$\tan p = \frac{\sin p}{\cos p} \qquad \text{(TH-5)}$$

und aus »*Bronstein*,« S. 80, (2.89)

$$\cot p = \frac{\sin p}{\cos p} \qquad \text{(TH-6)}$$

Formeln (T-5):
Hier wird die trigonometrische Funktion $\cos p$ durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. Die ersten drei Umformungen können »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, zweite Zeile entnommen werden. Bei der vierten Umformung handelt es sich um eine Umstellung von $(T\text{-}1)_3$. Die beiden weiteren werden nachstehend abgeleitet.

$$\cos p = \sqrt{1-\sin^2 p} = \sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 p}} = \frac{\sqrt{\mathrm{cosec}^2 p - 1}}{\mathrm{cosecp}}$$

Die Beziehung

$$\cos p = \sin p \cot p$$

ist einfach eine Umstellung der Gleichung »*Bronstein*«, S.80, (2.89).

Bemerkung zu (T-4) und (T-5):
Die letzen beiden Umformungen in diesen beiden Formeln sind nicht konsequent. In den vorhergehenden Umformungen werden die trigonometrischen Funktionen $\sin p$ bzw. $\cos p$ durch jeweils eine einzige andere trigonometrische Funktion (z. B. $\cos p$ bei $\sin p$ usw.) ausgedrückt. In diesem Zusammenhang ist es nicht konsequent, als letzte Umformungen, zwei Gleichungen anzugeben, bei denen auf der rechten Seite zwei verschiedene trigonometrische Funktionen befinden.

Formeln (T-6):
Die trigonometrische Funktion $\tan p$ wird durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. Die ersten drei Umformungen können »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, dritte Zeile entnommen werden. Die beiden weiteren werden im folgenden abgeleitet. Unter Benutzung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88), $(T\text{-}4)_4$ und $(T\text{-}5)_4$ folgt für $(T\text{-}6)_4$

$$\tan p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{\frac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p}}{\frac{1}{\sec p}} = \sqrt{\sec^2 - 1}$$

Entsprechend ergibt sich für $(T\text{-}6)_5$ aus »*Bronstein*«, S. 80, (2.88), $(T\text{-}4)_5$ und $(T\text{-}5)_5$

$$\tan p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{\frac{1}{\mathrm{cosec}\, p}}{\frac{\sqrt{\mathrm{cosec}^2 p - 1}}{\mathrm{cosec}\, p}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2 p - 1}}$$

Formeln (T-7):
Die trigonometrische Funktion $\cot p$ wird durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. Die ersten drei Umformungen können »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, vierte Zeile entnommen werden. Die vierte und fünfte Umformung folgen aus $\cot p = 1/\tan p$ und $(T\text{-}6)_4$ bzw. $(t\text{-}6)_5$.

Formeln (T-8):

Die trigonometrische Funktion $\sec p$ wird durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. Formel $(T\text{-}8)_1$ ist nicht korrekt. Denn nach $(T\text{-}1)_3$ und $(T\text{-}1)_1$ gilt

$$\sec p = \frac{1}{\cos p} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 p}}$$

Vermutlich handelt es sich hier um einen Übertragungsfehler. $(T\text{-}8)_2$ folgt unmittelbar aus $(T\text{-}1)_3$. Aus $(T\text{-}8)_2$ und $(T\text{-}5)_1$ ergibt sich $(T\text{-}8)_3$. Aus $(T\text{-}6)_4$ ergibt sich $(T\text{-}8)_2$ durch Auflösen nach $\sec p$

$$\sqrt{\sec^2 p - 1} = \tan p \text{ ergibt } \sec p = \sqrt{\tan^2 p - 1}$$

Entsprechend folgt aus $(T\text{-}7)_4$ durch Umstellen $(T\text{-}8)_4$:

$$\sqrt{\sec^2 p - 1} = \frac{1}{\cot p} \text{ ergibt } \sec^2 p = 1 + \frac{1}{\cot^2 p} \text{ und } \sec p = \frac{\sqrt{1+\cot^2 p}}{\cot p}$$

Ganz analog wird $(T\text{-}8)_5$ durch Umstellen von $(T\text{-}7)_5$ und Auflösen nach $\sec p$ erhalten. Die wenig nützliche Formel $(T\text{-}8)_6$ folgt aus $(T\text{-}5)_4$ und »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) durch Umstellen

$$\sec p = \frac{1}{\cos p} \text{ und } \cos p = \frac{\sin p}{\tan p} \text{ ergibt } \sec p = \frac{\tan p}{\sin p}$$

<u>Formeln (T-9)</u>:
Die trigonometrische Funktion $\operatorname{cosec} p$ wird durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt. $(T\text{-}9)_1$ ist Umstellung von $(T\text{-}2)_1$. $(T\text{-}9)_2$ folgt aus $(T\text{-}9)_1$ und $(T\text{-}1)_1$.$(T\text{-}9)_3$ folgt aus $(T\text{-}1)_1$ und $(T\text{-}4)_2$. $(T\text{-}9)_4$ ergibt sich aus $(T\text{-}7)_5$ durch Auflösen nach $\operatorname{cosec} p$. Entsprechend ergibt sich $(T\text{-}9)_5$ aus $(T\text{-}8)_5$. Schließlich folgt $(T\text{-}9)_6$ aus $(T\text{-}2)_1$ und »*Bronstein*«, S. 80, (2.89) durch Umstellen.

<u>Formeln (T-10)</u>:
$(T\text{-}10)_1$ folgt durch Umstellen von $(T\text{-}3)_1$. Nach »*Bronstein*«, S. 82, (2.111) ist

$$\sin\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos p)} \text{ und daher } 1-\cos p = 2\sin^2\frac{p}{2}$$

woraus mit $(T\text{-}10)_1$ die Formel $(T\text{-}10)_2$ folgt.

<u>Formeln (T-11)</u>:

$(T\text{-}11)_1$ folgt durch Umstellen von $(T\text{-}3)_2$. In $(T\text{-}11)_2$ verwendet Musil den Ausdruck $\sin^2(45° - \frac{p}{2})$, in dem Winkel in Grad angegeben werden. Das ist heute in der Mathematik für die Angabe der Argumente trigonometrischer Funktionen unüblich. Allgemein durchgesetzt hat sich die Verwendung des Bogenmaßes. Danach entspricht dem Winkel 360° der Wert 2π im Bogenmaß. »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3, Spalte 1 enthält die Umrechnung gängiger Gradmaße in entsprechende Bogenmaße. Dem Gradmaß 45° entspricht das Bogenmaß $\pi / 4$. Grundsätzlich werden in diesem Kommentar alle Winkelargumente von trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß angegeben. [vgl. hierzu auch (TH-4)].

Formel $(T\text{-}11)_2$ wird im folgenden bewiesen.

<u>Behauptung:</u>

$$\cos\text{vers}\, p = 1 - \sin p = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right)$$

Beweis:

Nach (TH-2) mit $\alpha = \pi / 4$ und $\beta = p / 2$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2}$$

Mit (TH-4) und (AH-1) wird

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2} - \sin\frac{p}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{p}{2} + \sin^2\frac{p}{2} - 2\cos\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\right)$$

Mit (TH-1) und da »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) $2\cos\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2} = \sin p$ ist, folgt schließlich

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) = \left(1 - \sin p\right)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Formeln (T-12): $(T\text{-}12)_1$ bzw. $(T\text{-}12)_2$ entsprechen »*Bronstein*«, S. 82, (2.111) bzw. (2.112).

Formeln (T-13: $(T\text{-}13)_1$ bzw. $(T\text{-}13)_2$ entsprechen »*Bronstein*«, S. 82, (2.113) bzw. (2.114).

Formel (T-14): Beide Formel werden im folgenden bewiesen.

Behauptung zu $(T\text{-}14)_1$:

$$\sin p + \cos p = \sqrt{1 + \sin 2p}$$

Beweis:

Durch Quadrieren folgt mit (TH-1) und (AH-1)

$$\left(\sin p + \cos p\right)^2 = 1 + 2\sin p$$
$$\sin^2 p + \cos^2 p + 2\sin p\cos p = 1 + 2\sin p\cos p$$

Mit (TH-1) und, da nach »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) $2\sin p\cos p = \sin 2p$ wird, ist die Behauptung bewiesen.

Behauptung zu $(T\text{-}14)_2$:

$$\sin p + \cos p = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - p\right)$$

Beweis:

Nach (TH-3) ist mit $\alpha = \pi / 4$ und $\beta = p$, folgt mit (TH-4)

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos p+\sin\frac{\pi}{4}\sin p\right)=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos p+\sin p)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung:
Im Original fehlt bei (T-14)$_2$ bei der Winkelangabe 45° das Gradzeichen. Hierbei handelt es sich um einen Flüchtigkeitsfehler.

Formel (T-15)$_1$:

Behauptung:

$$\cos p-\sin p=\sqrt{1-\sin 2p}$$

Beweis:

Quadrieren von beiden Seiten der Behauptung gibt mit (AH-1), (TH-1) und »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) [vgl. hierzu auch (T-26)$_1$]

$$\cos^2 p+\sin^2 p-2\cos p\sin p=1-\sin 2p$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel (T-15)$_2$:

Behauptung:

$$\cos p-\sin p=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\right)p$$

Nach (TH-2) und (TH-4) folgt

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos p-\cos\frac{\pi}{4}\sin p\right)=\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos p-\sin p)=\cos p-\sin p$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel (T-16)$_1$:

Behauptung:

$$\tan p+\cot p=2\operatorname{cosec} p$$

Beweis:
Mit den Beziehungen »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) und (2.89), (2.82), S. 81 (2.96) und S.78 (2.70) ergibt sich der nachstehende Beweis

$$\operatorname{tg} p+\operatorname{ctg} p=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\cos p}{\sin p}=\frac{\sin^2 p+\cos^2 p}{\sin p\cos p}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2p}=2\operatorname{cosec} p$$

Formel (T-16)$_2$:

Behauptung:

$$\cot p - \tan p = 2\cot 2p$$

Beweis:

Mit den Beziehungen »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) und (2.89), S. 81 (2.98) S. 80 (2.89) ergibt sich der nachstehende Beweis

$$\cot p - \tan p = \frac{\cos p}{\sin p} - \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{\cos^2 p - \sin^2 p}{\sin p \cos p} = \frac{\cos 2p}{\frac{1}{2}\sin 2p} = 2\cot p$$

2. Umrechnungs- und sonstige Formeln

Formel (T-17)$_1$:

Behauptung:

$$1 + \sin p = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + p\right)$$

Beweis:
Unter Verwendung von (TH-2) und (TH-4) folgt mit $\alpha = \pi / 4$ und $\beta = p / 2$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2} + \sin\frac{p}{2}\right) \qquad \text{(a)}$$

Durch Quadrieren von (1) ergibt sich unter Beachtung von (AH-1) und (TH-1)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin^2 p + \cos^2 p + 2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin p)$$

wobei »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) mit $\alpha = p / 2$ verwendet wurde. Damit ist (T-17)$_1$ bewiesen.

Formel (T-17)$_2$:
Diese Formel ist identisch mit (T-11)$_2$, was Musil nicht vermerkt hat.

Formel (T-18)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{1 + \sin p}{1 - \sin p} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p}{2}\right)$$

Beweis:
Zunächst gilt nach »*Bronstein*«, S. 80, (2.88)

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)}$$

Nach (T-17)$_1$ gilt

$$1+\sin p=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

Zum Beweis von (T-18)$_1$ muss daher unter Berücksichtigung von (TH-5) nur gezeigt werden, dass

$$1-\sin p=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

Nach (T-17)$_2$ gilt

$$1-\sin p=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)$$

Der Beweis ist geschlossen, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

Nach (TH-2) gilt mit (TH-4)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{p}{2}\right)$$

Durch Quadrieren dieses Ausdrucks ergibt sich mit (AH-1) und (TH-1)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right) \tag{1}$$

Als nächstes wird der Ausdruck $\cos^2(\pi/4+p/2)$ berechnet. Nach (TH-3) und (TH-4) folgt

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2}-\sin p\frac{p}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right) \tag{2}$$

Da die auf den rechten Seiten von (1) und (2) stehenden Ausdrücke identisch sind, gilt dies auch für die Ausdrücke auf den linken Seiten, womit der Beweis von (T-18)$_1$ erbracht.

Bemerkung:
Die Funktion $\tan x$ und damit erst recht der Ausdruck $\tan^2(\pi/4+p/2)$ auf der rechten Seite von (T-18)$_1$ werden für $x=(2k+1)\pi/2 \;\; k=0,1,2\ldots$ unendlich (∞). Dies ist äquivalent mit $p=(4k+1)\pi/2$. Es wird nun gezeigt, dass die linke Seite von (T-18)$_1$ für die gleichen Werte von p den Wert Unendlich annimmt.
Der Ausdruck

$$\frac{1+\sin p}{1-\sin p}$$

wird Unendlich, wenn der Nenner den Wert 0 annimmt und der Zähler nicht für die gleichen Argumente ebenfalls 0 wird.. Aus der Bedingung $1-\sin p = 0$ folgt

$$\sin p = 1 \;\Rightarrow\; p = (4k+1)\pi/2 \quad k = 1,2,3,\ldots$$

was mit der für die rechte Seite abgeleiteten Bedingung identisch ist.

Formel (T-18)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{1+\sin p}{\cos p} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) \tag{1}$$

Beweis:

Nach »*Bronstein*«, S. 80, (2.92) gilt

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \tag{TH-7}$$

Mit $\alpha = \pi/4$ und $\beta = p/2$ folgt aus (TH-10)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{p}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{p}{2}}$$

Weiter gilt nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

und daher

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{p}{2}}{1-\tan\frac{p}{2}} = \frac{\cos\frac{p}{2}+\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{p}{2}}\ , \tag{1}$$

wobei für die zweite Umformung (TH-5) berücksichtigt wurde. Nach »*Bronstein*«, S. 83 (2.130) und (2.131) gilt

$$\sin\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos p)} \tag{TH-9}$$

$$\cos\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos p\right)} \tag{TH-10}$$

Aus diesen Formeln und (2) folgt

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}}{\sqrt{1+\cos p}-\sqrt{1-\cos p}}$$

Erweiterung der rechten Seite mit dem Ausdruck $\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}$ gibt unter Berücksichtigung der elementaren Formeln (AH-1) und (AH-2) die Umformung

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1+\cos p+2\sqrt{\left(1+\cos p\right)\left(1-\cos p\right)}}{1+\cos p-\left(1-\cos p\right)}$$

Für den Radikand im Zähler gilt mit (TA-2)

$$\left(1+\cos p\right)\left(1-\cos p\right)=1-\cos^2 p$$

Damit folgt

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{2\left(1+\sqrt{1-\cos^2 p}\right)}{2\cos p}=\frac{1+\sin p}{\cos p}$$

Der Faktor 2 auf der rechten Seite wird gekürzt und mit (TH-1) folgt die Behauptung.

Formel (19)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{1+\tan p}{1-\tan p}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+p\right)$$

Beweis:
Nach (TH-7) und (TH-8) gilt für die rechte Seite der Behauptung

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+p\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan p}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan p}=\frac{1+\tan p}{1-\tan p}$$

Formel (19)$_2$:`

Behauptung:

$$\frac{1-\tan p}{1+\tan p}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-p\right)$$

Beweis:
Mit (TH-7) und (TH-8) ergibt sich für die rechte Seite

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan p}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan p}=\frac{1-\tan p}{1+\tan p}$$

Vorbemerkung zu den Formeln (T-20) mit (T-25):
In diesen Formel verwendet Musil für die Argumente der trigonometrischen Funktionen die Winkel 30° und 60°. Ihnen entsprechen die Bogenmaße (vgl. »*Bronstein*«,S. 79, Tabelle 2.3) $\pi/6$ und $\pi/3$, die im folgen-den verwendet werden.

Formel (T-20):

Behauptung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+p\right)=\cos p-\sin\left(\frac{\pi}{6}-p\right)$$

Beweis:
Nach (TH-2) gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+p\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos p+\cos\frac{\pi}{6}\sin p \tag{1}$$

Weiter gilt nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \tag{TH-11}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{TH-12}$$

Daher wird aus (1)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+p\right)=\frac{1}{2}\cos p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin p \tag{2}$$

Damit ist die linke Seite der Behauptung umgeformt. Für die rechte Seite folgt mit (TH-2), (TH-11) und (TH-12)

$$\cos p-\sin\left(\frac{\pi}{6}-p\right)=\cos p-\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos p-\cos\frac{\pi}{6}\sin p\right)=\cos p-\left(\frac{1}{2}\cos p-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin p\right)= \frac{1}{2}\cos p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin p \tag{3}$$

Da die rechten Seiten von (2) und (3) übereinstimmen, ist die Behauptung bewiesen.

Formel (T-21):

Behauptung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+p\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-p\right)-\sin p$$

Beweis:
Umformung der beiden Seite von (T-21) mit (TH-3) gibt zunächst

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos p-\sin\frac{\pi}{6}\sin p=\cos\frac{\pi}{6}\cos p+\sin\frac{\pi}{6}\sin p-\sin p$$

Mit (TH-11) und (TH-12) folg unter Beachtung der Tatsache, dass sich auf beiden Seiten der Term $\cos\pi/6\cos p$ heraushebt

$$-\frac{1}{2}\sin p=\frac{1}{2}\sin p-\sin p=-\frac{1}{2}\sin p\ ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Formel (T-22):

Behauptung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-p\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+p\right)-\sin p$$

Beweis:

Nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 gilt

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{TH-13}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \tag{TH-14}$$

Umformung beider Seiten der Behauptung ergibt mit (TH-2)

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos p-\cos\frac{\pi}{3}\sin p=\sin\frac{\pi}{3}\cos p+\cos\frac{\pi}{3}\sin p-\sin p \tag{1}$$

In (1) hebt sich auf beiden Seiten der Ausdruck $\sin\pi/3\cos p$ heraus und es folgt daher

$$-\cos\frac{\pi}{3}\sin p=\cos\frac{\pi}{3}\sin p-\sin p \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (TH-14) in (2) folgt die Behauptung, da beide Seiten von (2) gleich sind.

Formel (T-23):

Behauptung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-p\right)=\cos p-\cos\left(\frac{\pi}{3}+p\right)$$

Beweis:
Mit (TH-2) ergibt sich auf beiden Seiten der Behauptung

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos p+\sin\frac{\pi}{3}\sin p=\cos p-\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos p-\sin\frac{\pi}{3}\sin p\right)$$

Hierin heben sich auf der linken und rechten Seite die Terme $\sin\pi/3\sin p$ weg und mit (TH-13 folgt die Behauptung, weil sich auf beiden Seiten der gleiche Ausdruck $1/2\cos p$ ergibt.

Abschlussbemerkung zu den Formeln (T-20) mit (T-23):
Für praktische Berechnungen waren diese Formeln in der Zeit vor der Erfindung des Computers bedeutungslos, weil sie keinerlei Erleichterung bei der Berechnung der auf den linken Seite stehenden Funktionswerte bieten. Es handelt sich um sehr elementare „Spielereien“. Generell werden die von Musil auf den linken Seiten stehenden ganzzahligen Faktoren auf die rechten Seiten gebracht, weil so eine Übereinstimmung mit den in den zitierten Quellen angegebenen Formeln herbeigeführt wird

Vorbemerkung zu den Formelgruppen (T-24) und (T-25):
In diesen beiden Formelgruppen werden Potenzen von der zweiten bis zur fünften Ordnung für die trigonometrischen Funktion $\sin p$ bzw. $\cos p$ berechnet.

Formel (T-24)$_1$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.130)

Formel (T-24)$_2$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.132)

Formel (T-24)$_3$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.134)

Formel (T-24)$_4$:

Behauptung:

$$\sin^5 p=\frac{1}{16}\left(\sin 5p-5\sin 3p+10\sin p\right)$$

Beweis:
Unter E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricPowerFormulas.html findet sich folgende allgemeine Formel (8) für die Berechnung der Potenzen der Funktion $\sin x$ mit ungeradem Grad $2n+1$, n als ganzer Zahl:

$$\sin^{2n+1}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\sin\left[(2n+1-2k)x\right] \tag{1}$$

Aus (1) und (AH-3 bis (AH-5) mit $x=p$ und $n=2$

$$\sin^5 p=\frac{(-1)^2}{2^4}\left[\binom{5}{0}\sin 5p-\binom{5}{1}\sin^3 p+\binom{5}{2}\sin p\right]$$

Aus (AH-3) ergibt sich

$$\binom{5}{1}=\frac{5!}{4!1!}=\frac{4!5}{4!}=5 \qquad \binom{5}{2}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{3!\cdot4\cdot5}{3!1\cdot2}=10$$

und damit folgt schließlich

$$\sin^5 p = \frac{1}{16}\left(\sin 5p - 5\sin 3p + 10\sin p\right)$$

Dies ist genau die Formel $(\text{T-24})_4$.

Formel $(\text{T-25})_1$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.131)
Formel $(\text{T-25})_2$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.133)

Formel $(\text{T-25})_3$: »*Bronstein*«, S. 83, (2.135)

Formel $(\text{T-25})_4$:

Behauptung:

$$\cos^5 p = \frac{1}{16}\left(\cos 5p - 5\cos 3p + 10\cos p\right)$$

B eweis:
Die im Beweis von $(\text{T-24})_4$ angegebene Quelle von Weisstein enthält folgende Formel

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left[\left(2n+1-2k\right)x\right] \qquad (2)$$

Zu beachten ist, dass in (2) auf der rechten Seite ausschließlich positive Glieder stehen. Mit (AH-3) bis (AH-5) folgt aus (2) mit $x = p$ für $n = 2$

$$\cos^5 p = \frac{1}{16}\left(\cos 5p + 5\cos 3p + 10\cos p\right) \qquad (3)$$

Gleichung (3) unterscheidet sich von Musils Formel dadurch, dass der Term $5\cos 3p$ ein positives Vorzeichen aufweist, während bei Musil ein negatives steht. Vermutlich handelt es sich bei Musil um einen Übertragungsfehler. Die von Weisstein angegebene Formel (2) ist aus folgendem Grund richtig:

Unter http://de.wikipedia.org/wiki//Formelsammlung_Trigonometrie#_note-20 wurde Gleichung (3) mit Verweis auf folgende Literaturstelle aufgeführt: I. S. Gradstein und I. M. Ryzhik: Tables of Integrals, Series and Powers, Academic Press, 5th ed., 1994, Verweis 1.323.5. Dem Verfasser steht dieses Buch nicht zur Verfügung. Jedoch konnte er Einsicht in die vorhergehende 4. Auflage aus dem Jahr 1984 nehmen. Dort findet sich auf S. 25 im Abschnitt 1.320 Formel (2) für den Exponent $2n-1$. Eine Umrechnung auf den Exponenten $2n+1$ ergibt (2).

Vorbemerkung zu den Formelgruppe (T-26) und (T-27):
In diesen Formeln werden trigonometrische Funktionen, deren Argumente ganzzahlige Vielfache np des Grundarguments p sind, durch Potenzen der Grundfunktionen $\sin p$ und $\cos p$ und deren Produkte dargestellt.

Formel $(\text{T-26})_1$: »*Bronstein*«, S. 81, (2.96)

Formel $(\text{T-26})_2$:

Behauptung:

$$\sin 3p = 3\sin p\cos^2 p - \sin^3 p \qquad (1)$$

Beweis:
Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.97) findet sich

$$\sin 3p = 3\sin p - 4\sin^3 p \tag{2}$$

Gleichung (1) lässt sich mit Hilfe von (TH-1) wie folgt in (2) umformen:

$$\sin 3p = 3\sin p\cos^2 p - \sin^3 p = 3\sin p\left(1-\sin^2 p\right) - \sin^3 p = 3\sin p - 4\sin^3 p$$

Die in »*Bronstein*« angegebene Gleichung ist zweckmäßiger als die von Musil, weil auf der rechten Seite nur $\sin p$ und $\sin^3 p$ auftreten, während bei Musil zusätzlich noch $\cos^2 p$ enthalten ist.

Formel (T-26)$_3$:

Behauptung:

$$\sin 4p = 4\sin p\cos p\left(\cos^2 p - \sin^2 p\right) \tag{3}$$

Beweis:
Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.100)

$$\sin 4p = 8\cos^2 p\sin p - 4\sin p\cos p \tag{4}$$

Gleichung (3) lässt sich mit Hilfe von (TH-1) in (4) umformen:

$$\sin 4p = 4\sin p\cos p\left(2\cos^2 p - 1\right) = 8\cos^3 p\sin p - 4\sin p\cos p$$

Formel (T-26)$_4$:

Behauptung:

$$\sin np = \sin\left(n-1\right)p\cos p + \cos\left(n-1\right)p\sin p$$

Beweis:

Setze im Additionstheorem (TH-2) $\alpha = \left(n-1\right)p$ und $\beta = p$,so folgt sofort

$$\sin\left(np\right) = \sin\left[\left(n-1\right)p + p\right] = \sin\left(n-1\right)\cos p + \cos\left(n-1\right)p\sin p$$

Bemerkung:
Eine Gleichung der Form von Formel (T-26)$_4$ heißt Rekursionsbeziehung. Sie gestattet es durch wiederholte Anwendung alle Ausdrücke der Form $\sin np$ aus Ausdrücken niedrigerer Ordnung zu berechnen. Z. B. gilt für $n = 2$

$$\sin 2p = \sin p\cos p + \cos p\sin p = 2\sin p\cos p$$

womit Formel (T-26)$_1$ wieder gewonnen ist. Durch wiederholtes Anwenden von (T-26)$_4$ lassen sich Darstellungsformeln für $\sin np$ von beliebiger Ordnung *n* gewinnen.

Formel (T-27)$_1$:

Behauptung:

$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p = 2\cos^2 p - 1 = 1 - 2\sin^2 p \tag{1}$$

Beweis:

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.98)

$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p \tag{2}$$

Gleichung (2) stimmt mit dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite von (1) überein. Die beiden anderen Ausdrücke folgen durch Anwendung von (TH-1) wie folgt

$$\cos^2 p - \sin^2 p = \begin{cases} 2\cos^2 p - 1 \\ 1 - 2\sin^2 p \end{cases}$$

Formel (T-27)$_2$:

Behauptung:

$$\cos 3p = \cos^3 p - 3\sin^2 p \cos p \tag{3}$$

Beweis:
Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.99)

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p \tag{4}$$

Die rechte Seite von (3) lässt sich mit Hilfe von (TH-1) in die rechte Seite von (4) umformen.

$$\cos^3 p - 3\sin^2 p \cos p = \cos^3 p - 3\left(1 - \cos^2 p\right)\cos p = 4\cos^3 p - 3\cos^2 p$$

Wie in (T-26)$_2$ ist die in »*Bronstein*« angegebene Gleichung ist zweckmäßiger als die von Musil, weil auf der rechten Seite nur $\cos p$ und $\cos^3 p$ auftreten, während bei Musil zusätzlich noch $\sin^2 p$ enthalten ist.

Formel (T-27)$_3$:

Behauptung:

$$\cos 4p = \cos^4 p - 6\sin^2 p \cos^2 p + \sin^4 p \tag{5}$$

Beweis:
Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.101)

$$\cos 4p = 8\cos^4 p - 8\cos^2 p + 1 \tag{6}$$

Die rechte Seite von (5) kann mit Hilfe von (TH-1) und (AH-1) in die rechte Seite von (6) umgeformt werden.

$$\cos^4 p - 6\left(1 - \cos^2 p\right)\cos^2 p + \left(1 - \cos^2 p\right)^2 = \cos^4 p - 6\cos^2 p + 6\cos^4 p + 1 - 2\cos^2 p + \cos^4 p =$$
$$8\cos^4 p - 8\cos p + 1$$

Formel (T-27)$_4$:

Beweis:
E. Weisstein, http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html, dort Gleichung (47)

Formeln (T-28) und (T-29): Identisch mit (TH-2), Verweis auf »*Bronstein*« wird dort angegeben..

Formeln (T-30) und (T-31): Identisch mit (TH-3) , Verweis auf »*Bronstein*« wird dort angegeben.

Formeln (T-32) und (T-33):

Behauptung:
Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\tan(p \pm q) = \frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\cot q \pm \cot p}{\cot p \cot q \mp 1}$$

Beweis:
Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist identisch mit (TH-7). Der zweite ergibt mit »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) und (2.89) wie folgt. Zunächst gilt

$$\tan p = \frac{1}{\cot p}$$

und daher

$$\frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\frac{1}{\cot p} \pm \frac{1}{\cot q}}{1 \mp \frac{1}{\cot p} \frac{1}{\cot q}}$$

Erweitern auf der rechten Seite mit $\cot p \cot q$ liefert

$$\frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\cot q \pm \cot p}{\cot p \cot q \mp 1}$$

Formeln (T-34) und (T-35):

Behauptung:
Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\cot(p \pm q) = \frac{\cot p \cot q \mp 1}{\cot p \pm \cot q} = \frac{1 \mp \tan p \tan q}{\tan p \pm \tan q}$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist identisch mit »*Bronstein*«, S. 80, (2.93). Der zweite ergibt sich durch ganz analoge Rechnung wir bei (T-32) und (T-33).

Vorbemerkung zu den Formeln (T-36) mit (T-39):
In diesen Formeln werden auf den linken Seiten stehende Produkte trigonometrischer Funktionen dargestellt. Es ist im übrigen zweckmäßig, auf den linken Seiten den gemeinsamen Faktor $1/2$ auszuklammern (vgl. dazu die Ausführungen zu (T-39)).

Formel (T-36): »*Bronstein*«, S. 82, (2.123)

Formel (T-37): »*Bronstein*«, S. 82, (2.124)

Formel (T-38): »*Bronstein*«, S. 82, (2.125)

Formel (T-39):

Vorbemerkung:
Musil schreibt (T-39) wie folgt

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}\sin\left(p+q\right) - \frac{1}{2}\sin\left(p-q\right)$$

In der Mathematik ist es allgemein üblich, gemeinsame Faktoren in algebraischen Ausdrücken (z. B. Summen oder Differenzen) „auszuklammern". Dabei wird der gemeinsame Faktor vor eine runde oder eckige Klammer gesetzt. In der Klammer befinden sich die Terme des algebraischen Ausdrucks ohne den gemeinsamen Faktor. Dadurch ist die Struktur des betreffenden Ausdrucks klarer zu erkennen. In der Transkription werden gemeinsame Faktoren nicht ausgeklammert wohl aber im Kommentar.

Behauptung:

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}\left[\sin\left(p+q\right) - \sin\left(p-q\right)\right]$$

Beweis:
Durch Vertauschen von *p* und *q* folgt aus (T-38)

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}\left[\sin\left(p+q\right) + \sin\left(q-p\right)\right]$$

Es ist aber $q-p=-\left(p-q\right)$ und mit »*Bronstein*«, S. 79, (2.76) bzw. (2.77)

$$\sin\left(-x\right) = -\sin x \qquad \text{(TH-16)}$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{(TH-17)}$$

folgt $\sin\left(q-p\right) = -\sin\left(p-q\right)$, womit der Beweis erbracht ist.

Vorbemerkung zu den Formeln (T-40) mit (T-45):
In diesen Formeln werden Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen mit verschiedenen Argumenten *p* und *q* angegeben.

Formel (T-40): »*Bronstein*«, S. 82, (2.115).

Formel (T-41): »*Bronstein*«, S. 82, (2.116).

Formel (T-42): »*Bronstein*«, S. 82, (2.17).

Formel (T-43):

Behauptung:

$$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad (1)$$

Beweis:
(1) lässt sich auf die bei»*Bronstein*«, S. 82, (2.118) angegebene Formel

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad (2)$$

zurückführen, wenn unter Beachtung von (TH-16) in (2) die Argumente *p* und *q* vertauscht werden.

Formel (T-44):

Die beiden Formeln lassen sich für die Argumente $p \pm q$ zusammenfassen. Sie sind identisch mit »*Bronstein*«, S. 82, (2.119).

Formel (T-45):
Die beiden Formeln lassen sich nach dem Muster von (T-44) zusammenfassen. Sie sind identisch mit »*Bronstein*«, S. 82, (2.120)

Formel (T-46)$_1$:

Behauptung:

$$\cot p + \tan p = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$$

Beweis:
Werden in »*Bronstein*«, S. 82, (2.121) $\alpha = q$ und $\beta = p$ gesetzt, so folgt mit Beachtung von (TH-17) $\cos(q-p) = \cos(p-q)$ und damit (T-46)$_1$.

Formel (T-46)$_2$: »*Bronstein*«, S. 82, (2.122).

Formel (T-47):

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\tan\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}} = \tan\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Beweis:
Für den ersten Teil der Behauptung gilt durch Einsetzen von (T-40) in den Zähler und von (T-41) in den Nenner

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}} = \frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}\frac{1}{\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}} = \frac{\tan\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}}$$

dabei wurde von »*Bronstein*,« S. 80, (2.88) Gebrauch gemacht. Die zweite Umformung in (T-46) ist wegen »*Bronstein*,« S. 80, (2.87) trivial.

Formel (T-48):

Behauptung:

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = \frac{\tan\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}} = \cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Beweis:
Für den zweiten Teil der Behauptung gilt durch Einsetzen von (T-42) in den Zähler und von (T-43) in den Nenner

$$\frac{\cos(p+q)}{\cos(p-q)}=\frac{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\frac{\cos\frac{p+q}{2}}{\sin\frac{p+q}{2}}\frac{1}{\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}}=\frac{`\cot\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Dabei wurde von »*Bronstein*,« S. 80, (2.88) und (2.89) Gebrauch gemacht. Der erste (mittlere) Teil der Behauptung ist falsch. Denn aus der vorstehenden Formelkette folgt

$$\frac{\cos(p+q)}{\cos(p-q)}=\frac{\cos\frac{p+q}{2}}{\sin\frac{p+q}{2}}\frac{1}{\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}}=\frac{\cot\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}}$$

Formel (T-49)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\cos p-\cos q}{\sin q-\sin p}$$

Beweis:

Es darf über Kreuz multipliziert werden, wenn $\cos p+\cos q\neq 0$ und/oder $\sin q-\sin p\neq 0$ gilt. Die Sonderfälle werden für die weitere Betrachtung ausgeschlossen. Dann gilt

$$(\sin p+\sin q)(\sin q-\sin p)=(\cos p-\cos q)(\cos p+\cos q)$$

Mit Gleichung (AH-2) folgt auf beiden Seiten

$$\sin^2 q-\sin^2 p=\cos^2 p-\cos^2 q=1-\sin^2 p-\left(1-\sin^2 q\right)=\sin^2 q-\sin^2 p$$

Formel (T-49)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\tan\frac{p+q}{2}$$

Beweis:

Einsetzen von (T-40) und (T-42) in die linke Seite liefert

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\tan\frac{p+q}{2}$$

Formel (T-50)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p-\cos q}=\frac{\cos p+\cos q}{\sin q-\sin p}$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt nach dem Muster des Beweises für den ersten Teil von (T-49), wobei die Sonderfälle $\cos p - \cos q = 0$ und $\sin q - \sin p = 0$ sowie $p = q$ ausgeschlossen werden. Durch über Kreuz multiplizieren folgt

$$(\sin p + \sin q)(\sin q - \sin p) = (\cos p + \cos q)(\cos p - \cos q)$$

und mit (AH-2) und (TH-1)

$$\sin^2 q - \sin^2 p = \cos^2 p - \cos^2 q = 1 - \sin^2 p - \left(1 - \sin^2 q\right) = \sin^2 q - \sin^2 p$$

Durch die algebraische Umformung folgt also aus $(\text{T-50})_1$ die vorstehende Identität, womit diese Formel bewiesen ist.

Formel $(\text{T-50})_2$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = \cot \frac{q - p}{2}$$

Beweis:
Durch Anwenden von (T-40) auf den Zähler der linken Seite und (T-43) auf deren Nenner angewendet und anschließend »*Bronstein*«, S. 80, (2.89) und S. 79, (2.79) folgt

1

Formel (T-51):

Behauptung:

$$\frac{\tan p + \tan q}{\tan p - \tan q} = \frac{\cot p - \cot q}{\cot q - \cot p}$$

Beweis:
Mit Anwenden von »*Bronstein*«, S.80, (2.87) auf die rechte Seite folgt

$$\frac{\tan p + \tan q}{\tan p - \tan q} = \frac{\dfrac{1}{\tan p} + \dfrac{1}{\tan q}}{\dfrac{1}{\tan p} - \dfrac{1}{\tan q}}$$

Erweitern der rechten Seite mit $\tan p \tan q$ liefert

$$\frac{\dfrac{1}{\tan q} + \dfrac{1}{\tan p}}{\dfrac{1}{\tan q} - \dfrac{1}{\tan p}} = \frac{\tan p + \tan q}{\tan p - \tan q}$$

womit der Beweis geschlossen ist.

Formeln (T-52)1 und (T-52)2:

Diese beiden Formeln können in einem Schritt bewiesen werden.

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p+\cot q}=\frac{\tan p-\tan q}{\cot q-\cot p}=\tan p\tan q$$

Beweis:

Anwendung von $(\text{T-44})_1$ auf den linken Term liefert

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p+\cot q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}\frac{\sin p\sin q}{\sin(p+q)}=\tan p\tan q \qquad (1)$$

$$\frac{\tan p-\tan q}{\cot q-\cot p}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\left[-\frac{\sin p\sin q}{\sin(q-p)}\right]=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\frac{\sin p\sin q}{\sin(p-q)}=\tan p\tan q \qquad (2)$$

Da die Umformungen in den Gleichungen (1) und (2) auf das gleiche Ergebnis $\tan p\tan q$ führen, sind beide Teile der Behauptung bewiesen.

Formeln $(\text{T-53})_1$ und $(\text{T-53})_2$:

Diese beiden Formeln können in einem Schritt bewiesen werden.

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\cot q}{\cot p+\tan q}=\frac{\cot q-\tan p}{\cot p-\tan q}=\tan p\cot q$$

Beweis:

Anwendung von $(\text{T-46})_1$ auf die linke Seite (im Zähler dabei p und q vertauschen) gibt unter Berücksichtigung von »*Bronstein*«, S. 79, (2.77)

$$\frac{\tan p+\cot q}{\cot p+\tan p}=\frac{\cos(p-q)}{\sin q\cos p}\frac{\sin p\cos q}{\cos(p-q)}=\tan p\cot q$$

Anwendung von $(\text{T-46})_2$ auf mittleren Teil (im Zähler p und q vertauschen) gibt

$$\frac{\cot q-\tan p}{\cot p-\tan q}=\frac{\cos(p+q)}{\sin q\cos p}\frac{\sin p\cos q}{\cos(p+q)}=\tan p\cot q$$

Damit ist nicht nur der erste sondern auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Formel (T-54):

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p-\tan q}=\tan p\tan\left(p+q\right)$$

Beweis:

Umformung der rechten Seite mit (T-32)$_1$ liefert zunächst

$$\tan p\tan\left(p+q\right)=\tan p\frac{\tan p+\tan q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\tan^2 p+\tan p\tan q}{1-\tan p\tan q}$$

Teilen von Zähler und Nenner des rechten Ausdrucks durch $\tan p$ liefert

$$\frac{\tan^2 p+\tan p\tan q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\tan p+\tan q}{\frac{1}{\tan p}-\tan q}=\frac{\tan p+\tan q}{\cot p-\tan p}$$

wobei »*Bronstein*«, S. 80, (2.87) verwendet wurde. Da der rechte Teil von (T-54) sich in den linken umformen lässt, ist die Richtigkeit von (T-54) bewiesen.

Formel (T-55):

$$\frac{\cot p+\cot q}{\cot p-\tan q}=\cot q\tan\left(p+q\right)$$

Überprüfung:

Anwenden von (T-32)$_1$ auf die rechte Seite liefert

$$\cot q\tan\left(p+q\right)=\cot q\frac{\tan p+\tan q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\cot q\tan p+\cot q\tan q}{1-\tan p\tan q}$$

Der zweite Term im Zähler der rechten Seite ist wegen »*Bronstein*«, S. 80, (2.87) gleich 1 und daher wird

$$\frac{1+\tan p\cot q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\frac{1}{\tan p}+\cot q}{\frac{1}{\tan p}-\tan q}=\frac{\cot p+\cot q}{\cot p-\tan q}$$

Damit ist die Formel von Musil bewiesen.

Formel (T-56):

Behauptung:

$$\frac{\tan p-\tan q}{\cot p+\tan q}=\tan p\tan\left(p-q\right)$$

Beweis:

Mit (T-33)1 folgt unter Beachtung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

$$\tan p \tan(p-q) = \tan p \frac{\tan p - \tan q}{1+\tan p \tan q} = \frac{1}{\cot p} \frac{\tan p - \tan q}{1+\tan p \tan q} = \frac{\tan p - \tan q}{\cot p + \tan q}$$

Damit ist (T-56) bewiesen.

Formel (T-57):

Behauptung:

$$\frac{\cot q - \cot p}{\tan q + \cot p} = \cot q \tan(p-q)$$

Beweis:

Anwenden von $(\text{T-33})_2$ auf die rechte Seite liefert

$$\cot q \tan(p-q) = \cot q \frac{\cot q - \cot p}{1+\cot p \cot q} = \frac{\cot^2 q - \cot p \cot q}{1+\cot p \cot q}$$

Teilen von Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks durch $\cot q$ ergibt unter Berücksichtigung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

$$\cot q \tan(p-q) = \frac{\cot q - \cot p}{\cot p + \tan q}$$

Damit ist der Beweis geführt

Formel (T-58):

Behauptung:

Formel (T-58) umfasst zwei Formeln, die sich wie folgt kompakter in einer Gleichung angeben lassen.

$$1 \pm \tan p \tan q = \frac{\cos(p \mp q)}{\cos p \cos q}$$

Beweis:

Nach (T-30) und (T-31) gilt

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q$$

und damit wird unter Beachtung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88)

$$\frac{\cos(p \mp q)}{\cos p \cos q} = \frac{\cos p \cos q \pm \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = 1 \pm \tan p \tan q$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Formel $(\text{T-59})_1$:

Behauptung:

$$\sin(p+q)\sin(p-q)=\sin^2 p-\sin^2 q$$

Beweis:
Nach (TH-2) gilt für die linke Seite

$$\sin(p+q)\sin(p-q)=(\sin p\cos q+\cos p\sin q)(\sin p\cos q-\cos p\sin q)) \tag{1}$$

Werden in (1) $a=\sin p\cos q$ und $b=\cos p\sin q$ gesetzt so folgt aus (AH-2)

$$\sin(p+q)\sin(p-q)=\sin^2 p\cos^2 q-\cos^2 p\cos^2 q$$

Mit (TH-1) ergibt sich

$$\sin^2 p\cos^2 q-\cos^2 p\sin^2 q=\sin^2 p\left(1-\sin^2 q\right)-\left(1-\sin^2 p\right)\sin^2 q=\sin^2 p-\sin^2 q \tag{2}$$

Damit ist $(\text{T-59})_1$ bewiesen.

Formel $(\text{T-59})_2$:

Behauptung:

$$\sin(p+q)\sin(p-q)=\frac{1}{2}(\cos 2q-\cos 2p)$$

Beweis:
Teil 2:

Nach »*Bronstein*«, S. 83, (2.130) gilt

$$\sin^2 p=\frac{1}{2}(1-\cos 2p)$$

Damit folgt aus der rechten Seite von Gleichung (2) in $(\text{T-59})_1$

$$\sin^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2p-(1-\cos 2q)\right]=\frac{1}{2}(\cos 2q-\cos 2p)$$

Damit ist der Beweis geschlossen.

Formel $(\text{T-60})_1$:

Behauptung:

$$\cos(p+q)\cos(p-q)=\cos^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}(\cos 2q-\sin 2p)$$

Beweis:
Mit (TH-3) folgt

$$\cos(p+q)\cos(p-q)=(\cos p\cos q-\sin p\sin q)(\cos p\cos q+\sin p\sin q)$$

Wird $a = \cos p \cos q$ und $b = \sin p \sin q$ gesetzt, so folgt aus (AH-2)

$$\cos(p+q)\cos(p-q) = \cos^2 p \cos^2 q - \sin^2 p \sin^2 q$$

Durch Anwenden von (TH-1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos^2 p \cos^2 q - \sin^2 p \sin^2 q &= \cos^2 p\left(1-\sin^2 q\right) - \left(1-\cos^2 p\right)\sin^2 q \\ &= \cos^2 p - \cos^2 p \sin^2 q - \sin^2 q + \cos^2 p \sin^2 q \\ &= \cos^2 p - \sin^2 q \end{aligned} \tag{1}$$

Damit ist $(\text{T-60})_1$ bewiesen.

Formel $(\text{T-60})_2$:

<u>Behauptung:</u>
Die Behauptung wird für $(\text{T-60})_1$ und $(\text{T-60})_2$ zusammengefasst angeschrieben.

$$\cos(p+q)\cos(p-q) = \cos^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}(\cos 2q - \sin 2p)$$

<u>Beweis:</u>
Nach »*Bronstein*«, S. 83, (2.130 und (2.131) gilt

$$\cos^2 p = \frac{1}{2}(1+\cos 2p)$$
$$\sin^2 p = \frac{1}{2}(1-\cos 2p)$$

Damit folgt aus (1) in $(\text{T-60})_1$

$$\cos^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}\left[1+\cos 2p - (1-\cos 2q)\right] = \cos 2p + \cos 2q$$

Bei Musil steht

$$\cos^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}(\cos 2p - \sin 2q)$$

Diese Formel enthält zwei Fehler:

1 Das Vorzeichen des zweiten Terms auf der rechten Seite ist falsch (richtig + statt -).
2. Anstelle der Funktion $\cos 2q$ steht die falsche Funktion $\sin 2q$.

Formel (T-61):

<u>Behauptung:</u>

$$\sin(p+q)\cos(p-q) = \frac{1}{2}(\sin 2p + \sin 2q)$$

Mit (TH-2) und (TH-3) folgt

$$
\begin{aligned}
\sin(p+q)\cos(p-q) &= (\sin p\cos q+\cos p\sin q)(\cos p\cos q+\sin p\sin q)\\
&= \sin p\cos p\cos^2 q+\sin^2 p\sin q\cos q+\cos^2 p\sin q\cos q+\cos p\sin p\sin^2 q\\
&= \sin p\cos p\left(\cos^2 q+\sin^2 q\right)+\sin q\cos q\left(\sin^2 p+\cos^2 p\right)\\
&= \sin p\cos p+\sin q\cos q
\end{aligned}
$$

Nach »*Bronstein*«, S. 82, (2.125) gilt

$$\sin p\cos q=\frac{1}{2}\left[\sin(p-q)+\sin(p+q)\right]$$

Wird $p=q$ gesetzt und $\sin 0=0$ (»*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3, 1. Zeile) beachtet, so folgt

$$\sin p\cos p+\sin q\cos q=\frac{1}{2}(\sin 2p+\sin 2q)$$

Damit ist (T-61) bewiesen.

Formel (T-62):

Behauptung:

$$\sin(p-q)\cos(p+q)=\frac{1}{2}(\sin 2p-\sin 2q)$$

Beweis:

Mit (TH-2) und (TH-3) wird

$$
\begin{aligned}
\sin(p-q)\cos(p+q) &= (\sin p\cos q-\cos p\sin q)(\cos p\cos q-\sin p\sin q)\\
&= \sin p\cos p\cos^2 q-\sin^2 p\sin q\cos q-\cos^2 p\sin q\cos q+\sin^2 q\sin p\cos p
\end{aligned}
$$

Für die rechte Seite folgt mit (TH-1)

$$
\begin{aligned}
\sin(p-q)\cos(p+q) &= \sin p\cos p\left(\sin^2 q+\cos^2 q\right)-\sin q\cos q\left(\sin^2 p+\cos^2 p\right)\\
&= \sin p\cos p-\sin q\cos q
\end{aligned}
$$

Bei der Überprüfung von (T-61) wird gezeigt, dass

$$\sin p\cos p=\frac{1}{2}\sin 2p \qquad \sin q\cos q=\frac{1}{2}\sin 2q$$

Daher wird

$$\sin(p-q)\cos(p+q)=\frac{1}{2}(\sin 2p-\sin 2q)$$

und der Beweis ist geschlossen.

Formel (T-63):

Behauptung:

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2 u + (m)_4 \tan^4 u - (m)_6 \tan^6 u + \dots$$

Vorbemerkungen:

1. Im zweiten Term auf der rechten Seite verwendet Musil für die trigonometrische Funktion Tangens einmal die Abkürzung „tang“, die sonst in seinem Manuskript und daher auch in (T-63) nicht auftaucht.
2. Die Ausdrücke $(m)_0$, $(m)_1$ usw. sind bei Musil nicht definiert. Daher kann (T-63) nicht ausgewertet werden. Diese Koeffizienten können jedoch bestimmt werden, wie in der folgenden Analyse gezeigt wird.

Analyse:

Unter E. Weisstein http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html findet sich folgende Formel

$$\cos mu = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cos^k u \sin^{m-k} u \cos\left[\frac{1}{2}(m-k)\pi\right] \tag{1}$$

Aus (1) lässt sich leicht eine allgemein gültige Beziehung für die Berechnung des Ausdrucks $\cos mu / \cos^m u$ ableiten. Zunächst ergibt sich aus (1) durch Teilen mit $\cos^m u$

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \tan^{m-k} u \cos\frac{(m-k)\pi}{2} \tag{2}$$

Es gilt nach (AH-3)

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

Ferner gilt für $k = m$

$$\cos\frac{(m-k)\pi}{2} = \cos 0 = 1$$

Damit folgt aus (2)

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cos\frac{(m-k)\pi}{2} \tan^{m-k} u \tag{3}$$

Im folgenden wird die Zahl $m-k$ als *Ordnung* des Terms $\tan^{m-k} u$ bezeichnet. Die Reihe (3) ist nach fallenden Ordnungen angeordnet. Der Koeffizient des allgemeinen Gliedes mit der Ordnung $m-k$ in der Reihe (3) werde mit a_k bezeichnet. Aus (3) ist abzulesen, dass

$$a_k = \binom{m}{k} \cos\frac{(m-k)\pi}{2}$$

ist. Damit nimmt (3) folgende kompakte Form an

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \tan^{m-k} u \tag{4}$$

Musil hat seine Reihe nicht nach mit wachsender Zahl k fallenden sondern nach aufsteigenden Ordnungen angeordnet. Eine zur Reihe von Musil ähnliche Darstellung lautet

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = 1 + \sum_{k=1}^{m} p_k \tan^{k} u \tag{5}$$

Vergleich des allgemeinen Koeffizienten von (4) und (5) liefert

$$p_k = a_{m-k}$$

oder

$$p_k = \binom{m}{m-k} \cos \frac{k\pi}{2} \tag{6}$$

Aus (6) folgt sofort, dass für ungerade Zahlen $k = 2r - 1 \quad r = 1,2,3,\ldots$ die Koeffizienten p_k verschwinden, denn

$$\cos \frac{(2r-1)\pi}{2} = 0 \qquad \text{wenn } r = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Für geradzahlige Werte von $k = 2r \quad r = 1,2,3,\ldots < s$ wird

$$p_k = p_{2r} = \binom{2s}{2s-2r} \cos r\pi \tag{7}$$

oder

$$p_{2r} = \begin{cases} \dbinom{2s}{2(s-r)} & r = 2,4,6\ldots \\ -\dbinom{2s}{2(s-r)} & r = 1,3,5\ldots \end{cases} \tag{8}$$

Die Koeffizienten von Musil enthalten die Vorzeichen nicht, die in (7) vom Faktor $\cos(k\pi/2) = \cos r\pi$ gesteuert werden Daher ergibt sich für die Koeffizienten von Musil die nur teilweise richtige Darstellung

$$(m)_{2r} = \binom{2s}{2(s-r)} \tag{9}$$

<u>Kommentar zu der Formel (T-63) von Musil</u>

1. Der Vergleich von (T-63) mit den Gleichungen (5), (6) und (7) zeigt, das Gleichung (T-63) die Struktur dieser abgeleiteten Formeln richtig wieder gibt.
2. Allerdings wird in Gleichung (T-63) die Vorschrift für die Berechnung der Koeffizienten $(m)_k \quad k=0,2,4,\ldots$ der Reihenentwicklung nicht angegeben. Daher können diese Reihen nicht ausgewertet werden. Die Bezeichnung der Koeffizienten $(m)_k \quad k=0,2,4,\ldots$ in (T-63) ist nicht besonders gut gewählt, da sie weder die Berechnungsvorschrift enthält noch Aufschluss über die Struktur dieser Entwicklungskoeffizienten gibt. Richtig ist bei Musil, dass alle Reihenterme mit ungerader Ordnung $k=2r-1 \quad r=1,2,3,\ldots<s$ verschwinden.In allen abgeleiteten Gleichungen tritt der kontante Term +1 auf. Bei Musil weist der Term $(m)_0$ ebenfalls ein positives Vorzeichen auf. Jedoch hat Musil nicht erkannt, dass unabhängig vom Wert der Zahl m für die Größe $(m)_0=1$ gilt.
3. Für gerade Ordnungen $m=2s \quad s=1,2,\ldots$ tritt als höchste Potenz der Tangensfunktion die Ordnung m auf. Dabei alterniert gemäß Gleichung (7) das Vorzeichen in Abhängigkeit von der Ordnung m. Für $m=4,8,\ldots$ ist es positiv und für $m=2,6,\ldots$ negativ. Dieses Alternieren der Vorzeichen wird von Musils Gleichung korrekt wiedergegeben.
4. Für ungerade $m=2s-1 \quad s=1,2,\ldots$ weist der Term mit der höchsten Ordnung der Potenzen von $\tan u$ die Ordnung $2s-2$ auf. Dies lässt sich aus der Formel von Musil nicht ohne weiteres ablesen. Das Vorzeichen dieses Terms alterniert wie für gerade m. Für $m=5,9,\ldots$ ist das Vorzeichen positiv, für $m=3,7,\ldots$ negativ. Dieses Verhalten beschreibt die Formel von Musil korrekt.

Formel (T-64):

Behauptung:

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u}=(m)_1\tan u-(m)_3\tan^3 u+(m)_5\tan^5 u-\ldots$$

Wie bei (T-63) hat Musil keine Definitionen für die Koeffizienten $(m)_1,(m)_3,(m)_5,\ldots$ angegeben. Daher kann die Formel (T-64) nicht ausgewertet werden. Jedoch lassen sich wie bei (T-63) auch für (T-64) relativ einfach geschlossene Ausdrücke für diese Koeffizienten bestimmen.

Analyse:

Unter E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html findet sich folgende Formel

$$\sin mu=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cos^k u\sin^{m-k} u\sin\left[\frac{1}{2}(m-k)\pi\right] \tag{1}$$

Aus (1) lässt sich leicht eine allgemein gültige Beziehung für die Berechnung des Ausdrucks $\sin mu/\sin^m u$ ableiten. Zunächst ergibt sich aus (1) durch Teilen mit $\sin^m u$

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cot^k u\sin\frac{(m-k)\pi}{2} \tag{2}$$

Es gilt nach (AH-3)

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

Ferner gilt für $k = m$

$$\sin\frac{(m-k)\pi}{2} = \sin 0 = 0$$

Das zugehörige Glied verschwindet also in der Reihe (2). Die Reihe (2) nimmt unter Berücksichtigung der vorstehenden Ergebnisse die folgende Form an

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u} = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \sin\frac{(m-k)\pi}{2} \cot^k u \tag{3}$$

Im Gegensatz zu den Koeffizienten p_k im Kommentar zu (T-63), welche nur vom Reihenindex k abhängen, werden die zur Reihe (3) gehörenden Koeffizienten doppelt indiziert, weil sie Funktionen sowohl des Reihenindex k als auch der Ordnung m sind. Dabei spielt es eine wichtige Rolle, ob die Ordnung m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Definition der Koeffizienten lautet

$$b_{m,k} := \binom{m}{k} \sin\frac{(m-k)\pi}{2} \tag{4}$$

Mit den in (4) definierten Koeffizienten nimmt die Reihe (3) folgende Form an

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u} = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} b_{m,k} \cot^k u \tag{5}$$

Zu beachten ist, dass der Koeffizient $b_{m,m} = 0$ wird. Daher läuft der Index k in der Reihe (3) nur bis zur Zahl $m-1$.

Jedoch anders als in (T-63) steigt die Ordnung der Terme mit dem Index k an. Daher weist die Reihe (5) bereits eine ähnlich Struktur wie die Musilschen Formel (T-64) auf. Daher müssen die Koeffizienten $b_{m,k}$ in Abhängigkeit von den Größen m und k diskutiert werden.

Zunächst soll jedoch eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $b_{m,k}$ abgeleitet werden. Es gilt nach (4)

$$b_{m+2,k} = \frac{(m+2)!}{(m+2-k)k!} \sin\frac{(m+2-k)\pi}{2} \tag{6}$$

Das Vorzeichen dieser Koeffizienten wird durch die Funktion $\sin\left[(m-k)\pi/2\right]$ bestimmt. Zur Vereinfachung wird gesetzt

$$\alpha := \frac{(m-k)\pi}{2}$$

Dann gilt

$$\sin\frac{(m+2-k)\pi}{2} = \sin(\alpha+\pi)$$

Nach (TH-2) gilt

$$\sin(\alpha+\pi) = \sin\alpha\cos\pi + \cos\alpha\sin\pi$$

Wegen $\sin\pi = 0$ und $\cos\pi = -1$ folgt

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \quad \text{bzw. } \sin\frac{(m+2-k)\pi}{2} = -\sin\frac{(m-k)\pi}{2} \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt weiter

$$b_{m+2,k} = -\frac{(m)!(m+1)(m+2)}{(m-k)!k!(m+1-k)(m+2-k)}\sin\frac{(m-k)\pi}{2}$$

und schließlich unter Berücksichtigung der Definition der Koeffizienten $b_{m,k}$

$$b_{m+2,k} == -\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1-k)(m+2-k)}b_{m,k} \tag{8}$$

Gleichung (8) ist die gesuchte Rekursionsformel, die die Berechnung des Koeffizienten $b_{m+2,k}$ aus dem bekannten $b_{m,k}$. Aus (8) folgt die wichtige Tatsache, dass die Reihenkoeffizienten $b_{m+2,k}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Reihenkoeffizienten $b_{m,k}$ aufweisen, wobei der Reihenindex k gleich ist. Die Formel (T-64) von Musil vermag diese wichtige Eigenschaft nicht zu repräsentieren, da Musil unabhängig von der Größe der Ordnung m seine Reihe einfach ohne Beachtung des Vorzeichenwechsels gemäß (8) fortschreibt.

Im folgenden werden die beiden wichtigen Fälle unterschieden und behandelt, dass die Ordnung m eine gerade bzw. ungerade Zahl ist.

Fall 1: $m = 2s$ gerade

Sofern $k = 2r \leq 2s$ ist, wird $m - k = 2(s-r)$ eine gerade Zahl und damit verschwinden alle Koeffizienten $b_{m.k} = b_{2s.2r} = 0$ mit geradzahligen Reihenindizes $k = 2r$ wegen $\sin(s-r)\pi = 0$. Insbesondere gilt auch $b_{2s,0} = 0$. Die Reihe (5) weist also für geradzahlige Ordnungen m kein konstantes Glied auf.

Wenn $k = 2r - 1$ eine ungerade Zahl ist, gilt für die Koeffizienten $b_{2s,k}$

$$b_{2s,k} = \begin{cases} \binom{2s}{k} & \text{wenn } m - k = 1,5,9\ldots \\ -\binom{2s}{k} & \text{wenn } m - k = 3,7,11\ldots \end{cases} \qquad (9)$$

Die Reihe (5) weist also nur Koeffizienten $b_{2s,k}$ mit ungeraden Indizes k auf. Diese Koeffizienten besitzen alternierende Vorzeichen.

$\boxed{\text{Fall 2: } m = 2s - 1 \text{ ungerade}}$

Sofern $k = 2r - 1 \quad r = 1,2,3,\ldots \le s$ eine ungerade Zahl ist, wird die Differenz $m - k = 2(s - r)$ eine gerade Zahl und damit verschwinden die zugehörigen Koeffizienten $b_{2s-1,2r-1}$. Denn die in der Definitionsgleichung (4) trigonometrische Funktion $\sin\left[2(s-r)\pi/2\right] = \sin\left[(s-r)\pi\right] = 0$ Die Reihe (5) weist dann nur gerade Potenzen der Funktion $\cot u$ auf. Für die Berechnung der Koeffizienten $b_{2s-1,k}$ gilt nach wie vor Gleichung (5).

Schließlich folgt für den Fall $k = 0$

$$b_{m,0} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } m = 1,5,9\ldots \\ -1 & \text{wenn } m = 3,7,11\ldots \end{cases} \tag{10}$$

Das Vorzeichen des Koeffizienten $b_{m,0}$ weist den Betrag 1 auf und alterniert mit anwachsender Ordnung m

<u>Schlussfolgerungen</u>:

1. Die Formel (T-64) von Musil weist den grundlegenden Fehler auf, dass sie anstelle der korrekten Winkelfunktion $\cot u$ und deren Potenzen die Funktion $\tan u$ und deren Potenzen enthält.

2. Ferner hat Musil die Abhängigkeit der Koeffizienten $b_{m,k}$ von der Ordnung m bzw. der Differenz $m - k$ nicht erkannt. Insbesondere hat er die wichtige Rekursionsformel (8) nicht gekannt oder nicht beachtet. Jedenfalls gibt seine Formel die Tatsache nicht wieder, dass bei Erhöhung der Ordnung m um den Wert 2 die Koeffizienten $b_{m+2,k}$ gegenüber den Koeffizienten $b_{m,k}$ bei gleichen Werten des Reihenindex k die Vorzeichen wechseln.

3. Seine Formel ist nach Ersatz der fehlerhaften Funktion $\tan u$ durch die richtige Funktion $\cot u$ nur für <u>gerade Ordnungen</u> m und strukturell dann nur dann richtig, wenn $m - k = 1,5,9,\ldots$. ist. Für gerade Ordnungen m und $m - k = 3,7,11,\ldots$ weisen Musils Terme in der Reihe (5) die falschen Vorzeichen auf. (Vgl. hierzu die vorstehende Ziffer 2).

4. Für <u>ungerade Ordnungen</u> m ist Musils Formel komplett falsch, selbst wenn die falsche Funktion $\tan u$ durch die richtige $\cot u$ ersetzt wird. Denn bei ungerader Ordnung können in der Reihe (5) nur gerade Potenzen der Funktion $\cot u$ auftreten. Musils Formel (T-64) enthält dagegen nur Terme mit ungeraden Potenzen der Funktion $\tan u$.

Abschließende Bemerkung zu den Formeln (T-63) und (T-64):

1. Diese beiden Formeln haben kaum praktische Anwendungen. Der Autor vermutet, dass Musil sie selbst als „mathematische Fingerübungen" abgeleitet hat. Mit großer Wahrscheinlichkeit ist Musil von den Beziehungen

$$\sin mu = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cos^k u \sin^{m-k} u \sin\frac{(m-k)\pi}{2}$$

$$\cos mu = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cos^k u \sin^{m-k} u \cos\frac{(m-k)\pi}{2}$$

ausgegangen. Diese Formeln waren mit Sicherheit Anfang des 20. Jahrhunderts bekannt.

2. Der Verfasser vermutet, dass Musil die beiden Formeln erst nach der ersten Niederschrift aller anderen trigonometrischen Formeln eingefügt hat. Hierfür sprechen die beiden folgenden Gründe:
   a. Diesen beiden Formeln hat Musil anders als allen anderen trigonometrischen Formeln keine Gleichungsnummern zugeordnet.
   b. Die Schrift der beiden Formeln ist deutlich kleiner als die der darüber stehenden, was ebenfalls für ein späteres Einfügen spricht.

3. Die in Formel (T-64) nachgewiesenen Fehler belegen ein mal mehr, dass Musil entgegen der häufig in der Sekundärliteratur geäußerten Meinung kein Mathematiker war. Darauf hat der Verfasser[1] an anderer Stelle ausführlich hingewiesen.

[1] Franz Gustav Kollmann: Robert Musil und die Mathematik, Akademie der Wissenschaften und der Literatur Mainz, Abhandlungen der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, Nr. 1, 2007, S. 36f,. Vgl. hierzu auch Abschnitt 2 des vorliegenden Kommentars.