

# Kommentar zu den von Musil im „Register“-Heft notierten Formeln

von Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. F. G. Kollmann  
München

## 1. Allgemeines

Das mathematische Niveau der Formeln ist in den meisten Fällen vergleichsweise elementar (Oberstufe Gymnasium oder 1. Semester Mathematikvorlesungen Technische Universität). Viele von ihnen finden sich in gängigen Formelsammlungen. Bei einem nicht unerheblichen Anteil der nicht in Formelsammlungen nachweisbaren Formeln ist zu vermuten, dass Musil sie als eine Art „mathematischer Fingerübungen“ selbst abgeleitet hat.

Für alle Formeln werden entweder (soweit dies möglich ist) Quellen (Formelsammlung oder Internet) angegeben. Bei den restlichen Formeln, für die keine Quellen ermittelt werden konnten, hat der Verfasser diese entweder direkt abgeleitet oder ihre Richtigkeit bewiesen. Diese Ableitungen bzw. Beweise finden sich in diesem Kommentar.

Folgende Formelsammlung wird als Quelle verwendet:

I. N. Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, 6. vollständige und ergänzte Auflage. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 2006. Sie wird als »Bronstein« zitiert. Hinzugefügt werden die Seitenzahl und die Nummer der betreffenden Formel. Dann bedeutet »Bronstein«, S. 80, (2.90) die auf Seite 80 der Formelsammlung Bronstein, S. F. et al. stehende Formel mit der Nummer (2.90).

Ferner werden Formeln aus den folgenden in das Internet gestellten professionellen Formelsammlungen angegeben:

Weisstein Eric. „Versine“ from Mathworld – a Wolfram Web Resource: <http://mathworld.wolfram.com/Versine.html>. Hierbei ist versine eine spezielle trigonometrische Funktion (vgl. Hierzu (T-3)<sub>1</sub>). Für die Zitierung in diesem Kommentar wird folgende abgekürzte Schreibweise verwendet: E. Weisstein: <http://mathworld.wolfram.com/Versine.html>, wobei sich der letzte Teil der URL je nach mathematischem Inhalt ändert.

Die zweite Internetquelle lautet: <http://functions.wolfram.com/>. Bei Zitaten aus dieser Quelle werden die genaue Website und die dort angegebene Formelnummer zitiert. Ein beispielhaftes Zitat lautet: <http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Tan/20/01/> gilt (Formeln 01.08.20.0001.01 und 01.08.20.0002.01):

Ferner wird gelegentlich auf von Musil notierte Formeln verwiesen, deren Richtigkeit in diesem Kommentar nachgewiesen wurde. Alle Ableitungen und Beweise werden hier bewusst ausführlich angegeben, damit sie von Personen mit geringeren Kenntnissen in Mathematik (Abitur) nachvollzogen werden können.

## 2. Zur Transkriptionsweise

Musil hat in dem Heft 37 Register auf 15 Seiten mathematische Formeln notiert. Er hat die Blätter des Heftes jeweils in der linken oder rechten oberen Ecke paginiert. Dabei wurden die Seiten 14 und 15 ausgelassen. Die Reihenfolge der von Musil vergebenen Seitennummern lautet daher: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17. Die von Musil vergebenen Seitenzahlen werden mit größeren Zahlen links- bzw. rechtsbündig in der Transkription angegeben.

Die Formeln stammen aus den folgenden mathematischen Gebieten:

- Trigonometrie (p. 1 - 4)
- Kettenbrüche (p. 5)
- Grenzwerte (p. 6 - 7)
- Differentialquotienten (p. 8 – 13)
- Tangenzen und Normalen (p. 16 – 17)

Die folgende Tabelle 1 zeigt die Anzahl der für die einzelnen Sachgebiete notierten Formeln.

Tabelle 1 Anzahl der für die einzelnen Sachgebiete notierten Formeln

Sachgebiet	Anzahl Formeln
Trigonometrie	137
Kettenbrüche	24
Grenzwerte	31
Differenzialquotienten	114
Tangenten und Normalen	6
Gesamtanzahl Formeln	312

Bei der Angabe der Anzahl der Formeln wird wie folgt verfahren. Grundsätzlich besteht in der Mathematik eine Formel oder Gleichung aus einer linken und einer rechten Seite, die durch ein Gleichheitszeichen (=) getrennt werden. Derartige Formeln finden sich im Heft 37 [z. B. die Formeln (T-11), (T-20) mit (T-23)]. Weiter notiert Musil mehrere Formeln in einer Zeile [z. B. 3 in (T-1) und (T-2), sowie 2 in (T-3)]. Dann gibt es hinter einander angeordnete Formeln, die sich über mehrere Zeilen erstrecken. Beispiele sind die Formelgruppen (T-4) und (T-5) mit je 6 individuellen Formeln. Man beachte, dass diese beiden Formelgruppen 5 Gleichheitszeichen aufweisen. Schließlich gibt Musil bei einigen Formeln Voraussetzungen an, die ebenfalls in der Form von Gleichungen angeschrieben werden. Derartige Voraussetzungen werden nicht als eigene Formeln gewertet. Sie erhalten daher in der Transkription keine eigene Gleichungsnummer sondern werden der auf sie nachfolgenden Formel zugeordnet. Die Zählung wird für derartige Fälle an zwei Beispielen erläutert. Zunächst wird die Formelgruppe (D-1) betrachtet.

$$y = x^\alpha : \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad y = \sin x : y' = \cos x \quad (D-1)$$

Die beiden Gleichungen  $y = x^\alpha$  und  $y = \sin x$  sind die Voraussetzungen, in denen die Funktionen  $y = y(x)$  definiert werden. Zu der Funktion  $y = x^\alpha$  gehört die Ableitung  $dy/dx = \alpha x^{\alpha-1}$  und entsprechend zu der Funktion  $y = \sin x$  die Ableitung  $y' = \cos x$ . Also umfasst die Formelgruppe (D-1) nur 2 und nicht 4 Formeln. Als weiteres Beispiel wird die Formel (D-37) betrachtet, Die zugehörige Voraussetzung lautet

$$y = f[u(z), v(z_1)] \dots z(x), z_1(x)$$

Sie erhält keine eigene Gleichungs- bzw. Formelnummer. Die eigentliche Formelgruppe (D-37) steht eine Zeile tiefer.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dx} \quad (\text{D-37})$$

Sie umfasst, wie leicht abzuzählen ist 3 Formeln. Abschließend wird darauf hingewiesen, dass die Zuweisung von Zählern für die Anzahl von Formeln in einer Formelgruppe einen gewissen Interpretationsspielraum zulässt. Daher ist es möglich, dass bei der Feststellung der Anzahl der insgesamt von Musil notierten Formeln gewisse, allerdings geringe Differenzen auftreten können.

Innerhalb der einzelnen Gebiete vergibt Musil teilweise Nummern. Dabei setzt er die Nummern nicht wie heute üblich in runde Klammern sondern schreibt 1.) usw. Ferner schreibt er meistens mehrere Formeln in eine Zeile. Jedoch vergibt er nicht zu allen Formeln Nummern. Wenn diese Formelgruppen nummeriert werden, wird die Nummer von Musil linksbündig vor Beginn der ersten Formel notiert. Diese Schreibweise wird in der Transkription beibehalten. Manchmal notiert Musil zu gleichen Nummer noch Formeln in einer zweiten Zeile. Bei der Transkription konnte aus Platzgründen die Verteilung der Formeln auf eine oder zwei Zeilen nicht 1:1 umgesetzt werden. In der Transkription werden die von Musil vergebenen Nummern am linken Seitenrand angegeben.

Mit Hilfe der von Musil vergebenen Nummern lassen sich die Formeln nicht eindeutig ansprechen, weil er zu Beginn eines neuen mathematischen Gebietes die Nummerierung erneut beginnt. Für das Sachgebiet „Grenzwerte“ vergibt Musil keine Nummern. Um ein eindeutiges Ansprechen der Formeln zu ermöglichen, werden rechtsbündig zeilenweise in Klammern gesetzte Nummern für die Formelgruppen vergeben. Dabei wird zunächst das mathematische Gebiet wie folgt durch Großbuchstaben gekennzeichnet:

Tabelle 2 Kennzeichnende Buchstaben für mathematische Gebiete in Formelbezeichnungen

Mathematisches Gebiet	
Trigonometrie	T
Kettenbrüche	K
Grenzwerte	G
Differentialquotienten	D
Tangenten und Normalen	TN

Hinter dem kennzeichnenden Buchstaben folgt die Nummer, also z. B. (T-1). Sind mehrere Formeln von Musil in einer Formelgruppe angeordnet, werden innerhalb dieser Formelgruppe einzelne Formeln durch einen tief gestellten Index angegeben. Der Index wird fortlaufend vom Beginn der Formelgruppe gezählt. Beispielsweise enthält die Formelgruppe (T-5) insgesamt 6 einzelne Formeln, die jeweils durch ein Istgleich-Zeichen getrennt sind. Dann wird die dritte Formel durch (T-5)<sub>3</sub> angegeben. Die Formel (T-5)<sub>3</sub> lautet daher in der Schreibweise der Transkription

$$\cos p = \frac{\text{ctg } p}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 p}}$$

Nachstehend werden einige einfache, häufig benützte allgemeine Hilfsformeln zusammengestellt. Sie werden mit Gleichungsnummern nach folgendem Schema gekennzeichnet (AH-fortlaufende Nummer), also z. B. (AH-1). Nach »Bronstein«, S. 12, (1.28) und (1.32) gilt für beliebige reelle Zahlen  $a$  und  $b$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab - b^2 \quad (\text{AH-1})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (\text{AH-2})$$

Ferner werden die Binomialkoeffizienten benötigt. Ihre Definition lautet für nicht negative ganze Zahlen  $n$  und  $k$   $0 \leq k \leq n$  nach »Bronstein«, S. 13, (1.37a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (\text{AH-3})$$

Dabei bedeutet  $n!$  die Fakultät »Bronstein«, S. 13, (1.37b)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (\text{AH-4})$$

wobei definitionsgemäß

$$0! = 1 \quad (\text{AH-5})$$

gilt. Für die Potenzen von (-1) folgt

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{AH-6})$$

Innerhalb der einzelnen Kapitel werden häufig benutzte Hilfsformeln mit Quellennachweis in »Bronstein« wie folgt angegeben. Die Bezeichnungen der Hilfsformeln werden in Klammern gesetzt. Zunächst wird in der Klammer der kennzeichnende Großbuchstabe gemäß Tabelle 1.1. aufgeführt. Dem Großbuchstaben wird der große Buchstabe H nachgestellt. Dann folgt nach einem Bindestrich – die fortlaufende Nummerierung, also beispielsweise (TH-1) usw.

Ferner ist es erforderlich innerhalb von einzelnen Formelgruppen Hilfsbezeichnungen einzuführen, um Zwischenrechnungen anzusprechen. Dies erfolgt durch in Klammern gesetzte kleine Buchstaben (1), (2) usw. Die kleinen Buchstaben werden für jede neue Formelgruppe neu vergeben.

Soweit Formeln nicht in Formelsammlungen nachgewiesen werden können, werden sie in dem vorliegenden Kommentar abgeleitet.