Kommentar zu Musils Formeln für Kettenbrüche

1. Mathematische Definition von Kettenbrüchen

Kettenbrüche werden nach Perron[1] allgemein wie folgt definiert

$$K = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} \tag{1}$$

Die Koeffizienten $a_{0,}a_1,\ldots,a_n$ und $b_0,b_1,\ldots b_n$ werden mit a_ν und b_ν , $\nu = 1,2,\ldots,n$ bezeichnet.
Es wird vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_ν und b_ν ganze Zahlen sind.

Die beiden folgenden Fälle werden unterschieden:

Endliche Kettenbrüche: n ist eine *endliche*, ganze Zahl. Dann heißt der Kettenbruch K *endlicher Kettenbruch*.

Unendliche Kettenbrüche: Sofern $\nu \to \infty$ geht, ν positive ganze Zahl, heißt der Kettenbruch K *unendlicher Kettenbruch*.

Jeder endliche Kettenbruch lässt sich durch einfache algebraische Operationen in einen gewöhnlichen Bruch A / B umwandeln[2].

Endliche Kettenbrüche, bei denen alle Koeffizienten $a_0,a_1,a_2\ldots,a_n = 1$ und die Teilnenner $b_1,b_2,\ldots,b_n$ positive, ganze Zahlen (die Zahl b_0 darf eine beliebige, ganze Zahl sein) sind, heißen *endliche regelmäßige Kettenbrüche*[3].

Für endliche regelmäßige Kettenbrüche hat Muir eine symbolische Notation eingeführt:

$$K = \left[b_0,b_1,b_{2,}\ldots,b_n\right] \tag{2}$$

2. Musils Formeln zu Kettenbrüchen:

Es lässt sich zeigen, dass alle Kettenbruchformeln von Musil 1:1 aus dem Buch von Perron übernommen wurden. Dazu werden in der folgenden Tabelle die korrespondierenden Notationen nach Musil und Perron angegeben.

[1] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig: Teubner 1913.
[2] Perron, a.a.O. S. 4 ff.
[3] Perron, a.a.O. S. 28.

Tabelle 1 Notationen zu Kettenbrüchen

Bezeichnung	Notation nach Musil	Notation nach Perron
Kettenbruch 0-ter, 1.-ter,...,n-ter Näherung	$K_s = \frac{Z_s}{N_s}, s = 0,1,2,\ldots,n$	$\frac{A_\nu}{B_\nu}, \nu = 0,1,2,\ldots,n$

Anstelle des Index ν tritt bei Perron auch der Index λ.

Musil betrachtet ausschließlich endliche regelmäßige Kettenbrüche.

Formel (K-1):

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}} = K(q, q_1, \ldots q_n)$$

Analyse:
Die Formel (K-1) ergibt sich aus (1), indem $b_i = q_i \quad i = 1,2,\ldots n$ und $a_i = 1 \quad i = 1,2,\ldots n$.

Bei Musil fehlen allerdings folgende Hinweise:

1. Er gibt nicht an, dass er sich auf endliche regelmäßige Kettenbrüche beschränkt.
2. Er gibt nicht an, dass die Koeffizienten $b_1, b_{2,} \ldots, b_n$ positive ganze Zahlen sein müssen.

Formel (K-2):

Behauptung:

$$\frac{b}{a} = K_1 = \frac{1}{K} = K_1(0, q, q_1 \ldots q_n)$$

Analyse
(K-2) ist einfach der Kehrwert von (K-1).

Formel (K-3)
Diese und die folgenden Formeln behandeln die Berechnung von Näherungsbrüchen, bei denen nicht alle Terme im Nenner mitgenommen sondern bei einer Ordnung $s < n$ abgebrochen wird. Dementsprechend ergibt sich eine Näherung von der Ordnung s. Die Formel (K-3) besteht aus zwei zusammen gehörenden Formeln.

$$K_s = \frac{q_s \cdot Z_{s-1} + Z_{s-2}}{q_s N_{s-1} + N_{s-2}} = \frac{Z_s}{N_s}$$

$$Z_s = q_s Z_{s-1} + Z_{s-2}; \quad N_s = q_s N_{s-1} + N_{s-2}$$

Bei (K-3) handelt es sich um eine Rekursionsformel, mit deren Hilfe die Näherung K_s aus den beiden vorhergehenden, als bekannt vorausgesetzten Näherungen K_{s-1} und K_{s-2} bzw. den Näherungen für deren Zähler und Nenner berechnet werden kann.

Die Anordnung der beiden Formeln (K-3) ist bei Musil nicht besonders zweckmäßig. Konsequent ist es, zuerst die Rekursionsformeln [zweite Zeile in (K-3)] für die *s*-te Näherung des Zählers K_s bzw. des Nenners

N_s und dann erst die Rekursionsformel für die Berechnung der s-ten Näherung des Kettenbruches ([erste Zeile in (K-3)] anzugeben. Musil verfährt umgekehrt. Bei Perron[4] finden sich folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} A_\lambda &= b_\lambda A_{\lambda-1} + A_{\lambda-2} \\ B_\lambda &= b_\lambda B_{\lambda-1} + B_{\lambda-2} \end{aligned} \qquad (3)$$

Dies sind genau die zweiten Gleichungen (K-3) von Musil. Durch Umstellen folgt für die erste Zeile von (K-3) in Musils Notation (vgl. auch Tabelle 1)

$$K_s = \frac{Z_s}{N_s} = \frac{q_s Z_{s-1} + Z_{s-2}}{q_s N_{s-1} + N_{s-2}}$$

<u>Formel (K-4):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$N_s \cdot Z_{s-1} - Z_s N_{s-1} = (-1)^s$$

<u>Analyse:</u>
Die Beziehung (K-4) von Musil ergibt sich für den Fall endlicher regelmäßiger Kettenbrüche aus folgender Gleichung bei Perron[5]

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^\lambda \frac{1}{B_{\lambda-1} B_\lambda} \qquad (4)$$

Hieraus folgt durch einfache Umformung [Multiplikation mit $B_{\lambda-1} B_\lambda$ auf beiden Seiten von (4)]

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^\lambda \qquad (5)$$

Das ist genau Musils Formel (K-4).

<u>Formel (K-5):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$K_{s+1} - K_s = \frac{(-1)^s}{N_s \cdot N_{s+1}}; \quad \left| K_{s+1} - K_s \right| = \frac{1}{N_s \cdot N_{s+1}}$$

<u>Analyse:</u>
Der erste Teil von (K-5) ist identisch mit (4) in der Analyse von (K-4). Der zweite Teil ergibt sich durch Bildung des Betrages.

<u>Formeln (K-6) mit (K-8):</u>

Die Formeln (K-6) mit (K-8) werden zusammen betrachtet.

<u>Behauptungen:</u>

---

[4] Perron, a.a.O. S. 15 ohne Gleichungsnummer, gewonnen aus Gl. (24) für den Spezialfall $\nu = 1$ und $a_\lambda = 1$ (endlicher regelmäßiger Kettenbruch).
[5] Perron, a.a.O. S. 16, Gl. (31)..

$K_0 < K_1 \quad ,K_2 < K_3 \quad ,K_4 < K_5 \ldots K_s < K_{s+1}\ s$ gerade (K-6)

$K_1 > K_2 ,K_3 > K_4 \ldots K_s > K_{s+1} \cdots s$ ungerade
(K-7)

1.) $K_0 < K_2 < K_4 < K_6 \cdots$ (K-8)
$K_1 > K_3 > K_5 > K_7 > \cdots$

oder $\left.\begin{array}{l} K_0 < K_2 < K_1 \\ K_2 < K_3 < K_4 \\ K_4 < K_5 < K_3 \end{array}\right\}$ Jeder Näherungsbruch. liegt zwischen seinen vorausgehenden Näherungsbrüchen

Analyse:
Die Beziehungen (K-6) mit (K-8) ergeben sich aus folgender Beziehung[6] von Perron, die hier in der Notation von Musil angegeben wird.

$$K_0 < K_2 < K_4 < \ldots < K < \ldots < K_5 < K_3 < K_1 \tag{4}$$

Gleichung (4) stellt eine geschachtelte Ungleichung dar, da sie eine große Anzahl von Ungleichungen enthält. Musil hat diese geschachtelte Ungleichung in einzelne Ungleichungen aufgelöst. Mathematisch gesehen besitzt die geschachtelte Ungleichung von Perron deutliche mehr Aussagekraft als die aufgelösten Ungleichungen nach Musil. Die Ungleichungen (K-6) und (K-7) sind korrekt, wie sich leicht aus (4) ablesen lässt. Die ersten beiden Ungleichungen in (K-8) sind ebenfalls korrekt. Von den beiden nach dem Wort „oder" stehenden drei Ungleichungen sind die erste und die dritte korrekt. Die zweite ist jedoch fehlerhaft. Denn aus (4) folgt, dass alle Näherungsbrüche K_s mit $s = 2r \quad r = 1,2,\ldots$ mit geraden Indices kleiner sind als solche mit ungeraden Indices K_{2r-1} mit $r = 1,2,\ldots$. Daher ist $K_2 < K_3 < K_4$, denn nach (4) gilt $K_4 < K_3$. Kollmann hat zur Datierung des Formeleintrages in Heft 37 und zur Richtigkeit der im Abschnitt „Kettenbrüche" von Musil notierten Formeln eine umfangreiche Studie[7] vorgelegt, in der auf weitere Details eingegangen wird.

Formel (K-9):

Behauptung:

$$| K_s - K | = f < \frac{1}{N_s^2}$$

Analyse:
Die Fehlerabschätzung (K-9) folgt aus[8]

$$\left| \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right| < \frac{1}{B_{\nu-1}^2}$$

indem $\xi_0 = K$, $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = K_s$ und $B_{\nu-1}^2 = N_s^2$ gesetzt werden.

---

[6] Perron, a.a.O. S. 43, Gl. (6).
[7] [7] Vgl. hierzu Franz Gustav Kollmann: Zur Datierung der von Musil notierten mathematischen Formeln sowie deren Richtigkeit, erscheint im Musil Forum
[8] Perron, a.a.O. S. 43 Gl. (9).

Abschlussbemerkungen:

Alle von Musil zu endlichen regelmäßigen Kettenbrüchen angegebenen Formeln lassen sich auf die bei Perron enthaltenen Beziehungen zurückführen. Es sei noch bemerkt, dass die von Musil gewählte Notation sinnfälliger ist als die bei Perron, weil die Kernbuchstaben *N* und *Z* direkt auf „Nenner“ und „Zähler“ hinweisen, während Perron hierfür B bzw. *A* wählt.. Ferner konnte ein Mann mit der mathematischen Vorbildung Musils (Studium des Maschinenbaus an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, Studium von Mathematik im Nebenfach an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin) diesen Transfer von der Notation Perrons auf seine eigene mühelos leisten.

Weiter konnte durch eine Literaturrecherche im digitalen Katalog der TU Wien festgestellt werden, dass das Buch von Perron sich in dieser Bibliothek befindet, so dass es Musil während seiner Beschäftigung dort (1911 – 1913) zur Verfügung gestanden haben kann.

Schließlich wurde noch ein früheres Buch des Mathematikers Felix Klein[9] ermittelt, das einen Teil der von Perron angegebenen Formeln enthält. Dieses Buch befindet sich jedoch nicht in der Bibliothek der Technischen Universität Wien, so dass es mit sehr großer Wahrscheinlichkeit als Informationsquelle für Musil ausscheidet.

Daher ist festzuhalten, dass aus den Untersuchungen von Kollmann[10] sich als TAQUN für den Eintrag der Formeln in das Heft 37 aus Musils Nachlass das Jahr 1913[11] (Erscheinungsjahr des Buches von Perron) ergibt.

---

[9] Klein, Felix: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I, Göttingen 1896.
[10] Kollmann, a.a. O.