Kommentar zu Musils Formeln für Grenzwerte

1. Grundlagen

Bei Grenzwerten wird zwischen Grenzwerten von Folgen und von Funktionen unterschieden. Eine unendliche Folge besteht aus unendlich vielen reellen Zahlen $\{a_n\}$, die von den natürlichen Zahlen n abhängen. Die Zahlen $\{a_n\}$ heißen Glieder der unendlichen Folge. Für eine unendliche Folge kann deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ermittelt werden, wenn er existiert. Da Musil in Heft 37 Register nur Grenzwerte von Funktionen notiert hat, beschränkt sich dieser Kommentar auf diesen Typus.

Nach»*Bronstein*«, S. 53, Abschnitt 2.1.4.1 gilt folgende Definition. Es sei eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung einer Stelle $x = a$ definiert, eventuell mit Ausnahme der Stelle $x = a$. Dann nimmt die Funktion an dieser Stelle den Grenzwert A an, bezeichnet mit

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

wenn es nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine zweite positive Zahl η derart gibt, dass für alle x mit $|x-a| < \eta$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

gilt.

In der Mathematik kommt es häufig vor, dass der Definitionsbereich der Funktion unbeschränkt ist, d. h. dass die zulässigen Werte von x in dem Bereich $-\infty \le x \le \infty$ liegen. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

wenn für eine beliebig kleine Zahl ε eine positive Zahl N derart angeben läßt, dass für beliebige $x > N$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

gilt.

Regel von L´Hospital

Bei der Berechnung von Grenzwerten kommen unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ und $0 \cdot \infty$ vor. Dann führt häufig die Regel von L´Hospital zum Erfolg. Sie wird für die Fälle von Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ angegeben. Es sei

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Ferner seien

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \qquad \text{und} \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dx}$$

die ersten Ableitungen der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Wenn an der Stelle $x = a$ die Funktion $f(x)$ durch Bildung von

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

liefert, dann kann der Grenzwert wie folgt berechnet werden

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi'(x)} \tag{GA-1}$$

Sofern sich dann immer noch ein unbestimmter Ausdruck ergibt, wird der Prozess der Regel von l´Hospital durch Bildung der zweiten, dritten…Ableitungen so lange fortgesetzt, bis sich ein bestimmter Ausdruck ergibt.

Schließlich wird noch darauf hingewiesen, dass Musil grundsätzlich $\lim\limits_{x=0}, \lim\limits_{x=\infty}$ usw. schreibt, die in der Transkription beibehalten wird. In diesem Kommentar wird die heute übliche Notation $\lim\limits_{x \to 0}, \lim\limits_{x \to \infty}$ usw. verwendet.

2 Logarithmen

Der **Logarithmus** einer positiven reellen Zahl $x > 0$ zur **Basis** $b > 0\ b \neq 1$ wird mit $\log_b x := a$ bezeichnet. Für ihn gilt die Gleichung nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.18a)

$$\boxed{b^a = x} \tag{GA-2}$$

und nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.18b) ist

$$x = \log_b a \tag{GA-3}$$

In der Mathematik gibt es zwei sehr häufig angewendete Basen und diesen speziellen Basen zugeordnete Logarithmen.

Dekadische Logarithmen mit der Basis $b = 10$. Für sie wird nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.21) vereinfachend geschrieben

$$\log_{10} x = \lg x$$

Da Musil keine Formeln mit dekadischen Logarithmen notiert hat, wird auf diese hier nicht weiter eingegangen.

Natürliche Logarithmen mit der Basis $e = 2{,}718281828\ldots$. Die Zahl e ist irrational und heißt Eulersche Zahl. Der natürliche Logarithmus einer positiven reellen Zahl x wird mit $\ln x$ bezeichnet.

$$\log_e x = \ln x \tag{GA-4}$$

Bei Musil kommen entweder natürliche Logarithmen oder Logarithmen zur einer beliebigen Basis b vor. Musil verwendet für die natürlichen Logarithmen ein großes geschwungenes „L“. Diese Schreibweise ist vollkommen ungebräuchlich und kann in der Transkription nicht dargestellt werden.

Wichtig sind folgende Rechenregeln für Logarithmen mit beliebiger Basis b.

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{für } b > 1 \\ \infty & \text{für } b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Die Umrechnung von Logarithmen zur Basis *b* in Logarithmen zur Basis *a* erfolgt nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.20) gemäß

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \text{(GA-5)}$$

3 Formeln von Musil

Musil gibt zunächst einige allgemeine Formeln für die Berechnung von Grenzwerten an. Sodann folgen Formeln für spezielle Grenzwerte.

3.1 Allgemeine Formeln

In den Formeln (G-1) mit (G-9) gibt Musil einige allgemeine Formeln zur Berechnung von Grenzwerten an. Allerdings ist seine Schreibweise mathematisch nicht präzise.

Formel (G-1):

Dies soll am Beispiel der Formel (G-1) erläutert werden. Musil schreibt

$$\lim\left(\Phi_n \pm \Psi_n\right) = \Phi \pm \Psi = \lim \Phi_n \pm \lim \Psi_n \qquad \text{(G-1)}$$

Hierbei bleibt offen, ob es sich bei den Größen Φ_n und Ψ_n um Glieder einer Folge oder aber um Funktionen (deren unabhängige Variable nicht angegeben wird) handelt. Da Musil ab Gleichung (G-8) ausschließlich Grenzwerte von Funktionenbehandelt, wird vermutet, dass es sich auch bei den vorstehend aufgeführten Größen nicht um Glieder von Folgen sondern um Funktionen handelt. Weiter gibt Musil nicht an, an welcher Stelle (z. B. $x = a$) die Grenzwerte berechnet werden sollen. Der Index „*n*“ ist hierfür nicht aussagefähig. Die von Musil angegebene Reihenfolge macht ferner keinen Sinn, weil Φ und Ψ die ermittelten Grenzwerte sind, die logischer Weise am Ende der Formel stehen müssen. Richtig lautet daher die Gleichung (G-1) nach »*Bronstein*«, S. 55, (2.22) wie folgt.

$$\lim_{x\to a}\left[\Phi(x) \pm \Psi(x)\right] = \lim_{x\to a}\Phi(x) \pm \lim_{x\to a}\Psi(x) = \Phi \pm \Psi\,,$$

wobei die Beziehungen

$$\lim_{x\to a}\Phi(x) = \Phi \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a}\Psi(x) = \Psi$$

gelten.

Bei den Formeln (G-2) bis (G-7) erfolgen die Richtigstellungen im obigen Sinn kommentarlos.

Formel (G-2):

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left(\Phi(x)\cdot\Psi(x)\right)=\lim_{x\to a}\Phi(x)\cdot\lim_{x\to a}\Psi(x)=\Phi\cdot\Psi$$

Siehe »*Bronstein*«, S. 55, (2.23)

Formel (G-3):

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\Psi(x)}=\frac{\Phi}{\Psi}$$

Siehe »*Bronstein*«, S. 55, (2.24) mit der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{x\to a}\Psi(x)\neq 0$ ist.

Formel (G-4):

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left[c\cdot\Phi(x)\right]=c\cdot\lim_{x\to a}\Phi(x)$$

Folgt mit »*Bronstein*«, S. 55, (2.21) und $\Phi(x)=c$ und $c=\text{const}$ direkt aus (G-2).

Zwischenbemerkung:

Es ist zweckmäßig, zunächst die Formeln (G-8) und (G-9) zu kommentieren und anschließend die Formeln (G-5) mit (G-7). Denn die letzteren sind Spezialfälle von (G-9).

Formeln (G8-) und (G-9):

Es wird folgender wichtiger Fall behandelt. Es sei $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion der unabhängigen Variablen x. Ferner existiere der Grenzwert Φ dieser Funktion an der Stelle $x=x_1$. Es gelte also

$$\lim_{x\to x_1}\varphi(x)=\Phi \tag{1}$$

Weiter sei eine Funktion $y:=f\left[\varphi(x)\right]$ als Funktion der Funktion $\varphi(x)$ gegeben. Dann kann diese Funktion mit Hilfe einer neuen Variablen $z:=\varphi(x)$ ausgedrückt werden durch

$$y=f(z) \tag{2}$$

An der Stelle $x=x_1$ nimmt gemäß Gleichung (1) die Funktion $\varphi(x_1)=\Phi$ den Wert Φ an. Dann gilt für die Variable z

$$z_1=\lim_{x\to x_1}\varphi(x)=\Phi$$

Unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z=z_1$ stetig ist, gilt weiter

$$y_1 = \lim_{z \to z_1} f(z) = f\left[\lim_{x \to x_1} \varphi(x)\right] = f(\Phi) \tag{3}$$

Die Aussage von Gleichung (3) hat Musil wie folgt verbalisiert: Der Limes einer Funktion = Funktion des Limes. Dies muss wie folgt präzisiert werden:

Es sei eine Funktion $f(z)$ einer Variablen z gegeben, die ihrerseits Funktion $z = \varphi(x)$ einer weiteren Variablen x ist. Unter den Voraussetzungen, dass der Grenzwert $z_1 = \lim_{x \to x_1} \varphi(x) = \Phi$ existiert und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = z_1$ stetig ist, kann der Grenzwert der Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = z_1$ als Funktion $f(\Phi)$ des Grenzwertes $\lim_{x \to x_1} \varphi(x) = \Phi$ berechnet werden.

<u>Formel (G-10):</u> Andere Schreibweise von (G-9), wobei die Definition $\lim_{x \to x_1} \varphi(x) = z_1$ verwendet wird.

<u>Formel (G-5):</u> Spezialfall von Formel (G-9)mit $\varphi(x) = \log_b x$

<u>Formel (G-6):</u> Spezialfall von Formel (G-9) mit $z = \varphi(x)^{\psi(x)}$

<u>Formel (G-7):</u> Einfache Umkehrung von Formel (G-3)

3.2 Spezielle Grenzwerte

<u>Vorbemerkung zu den Formeln (G-11) und Formel (G-12)$_1$:</u>

Zunächst werden die Formeln (G-12) betrachtet, weil sich Formel (G-11) aus (G-12)$_1$ herleiten lässt.

<u>Formel (G-12)$_1$:</u>

Behauptung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

<u>Beweis:</u>

Für den Grenzübergang $n \to \infty$ $n \in \mathbb{N}$ gilt die Behauptung (vgl. z. B. Alber[1]). Sie muss also nur für den Grenzübergang $n \to -\infty$ verifiziert[2] werden. Dies erfolgt mit der Regel von L´Hospital (GA-1). Betrachtet wird folgende Grenzwertbildung

---

[1] Alber, H.-D. Skript Analysis I, S. 116, http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/analysis/pde/teaching/Skripten_Alber/ana1.pdf

$$\lim_{z\to\infty}\left[-z\ln\left(1-\frac{a}{z}\right)\right]=-\lim_{z\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{a}{z}\right)}{\frac{1}{z}}=$$

$$-\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{1-a/z}\left(\frac{a}{z^2}\right)}{-\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{a}{1-\frac{a}{z}}=a$$

Daraus folgt

$$\lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}e^{-z\ln(1-z/a)}=e^a$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel (G-12)$_2$:

Bemerkung: Musil verwendet als Symbol für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ ein großes geschwungenes „L“, das mit dem verwendeten Textverarbeitungssystem nicht darstellbar ist.

Behauptung.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$$

Beweis:
Anwendung der Regel (GA-1) von L´Hospital liefert mit der Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$$

und der Kettenregel (DA-7) (vgl. hierzu Abschnitt 5.1.3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=1$$

Formel (G-11): Diese Formel ergibt sich als Sonderfall für $a=1$ aus Formel (G-12)$_1$.

Formel (G-13)$_1$:

Behauptung:

[2] Die Kenntnis dieses Beweises verdanke ich Herrn Professor Dr. Alber, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+ax\right)^{1/x} = e^a$$

Beweis:
Die Substitution

$$\frac{1}{x} := z$$

liefert

$$\lim_{x\to 0}\left(1+ax\right)^{1/x} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a$$

wobei Formel $(G\text{-}12)_1$ berücksichtigt wurde.

Formel $(G\text{-}13)_2$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = \ln b$$

Beweis:

Nach Formeln (GA-2) und (GA-3) lässt sich b^x mit Hilfe des natürlichen Logarithmus darstellen als

$$b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x\ln b} \tag{1}$$

Für die Anwendung der Regel von l´Hospital werden die Ableitung (DA-9) (vgl. Abschnitt 5.1.3) der Exponentialfunktion e^x und die Kettenregel (DA-7) benötigt. Durch Einsetzen von (1) in die Behauptung und darauf folgender Anwendung der Regel (GA-1) von l´Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln b}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln b\, e^{x\ln b}}{1} = \ln b$$

Formel $(G\text{-}14)_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\log_b\left(1+ax\right)}{x} = \frac{a}{\ln b}$$

Beweis:
Zunächst wird der Logarithmus zur Basis b mit Hilfe von Gleichung (GA-5) in den entsprechenden natürlichen Logarithmus umgerechnet.

$$\log_b(1+ax) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln b}$$

Damit wird aus der Behauptung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_b(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x \ln b}$$

Als nächstes wird die Regel von L´Hospital angewendet. Dazu wird die Ableitung des Zählers benötigt, die hier ohne Beweis mitgeteilt wird [vgl. hierzu Kommentar zu Formel (D-25)$_1$]

$$. \qquad \frac{d \ln(1+ax)}{dx} = \frac{a}{1+ax} \qquad (1)$$

Die Regel (GA-5) von L´Hospital liefert schließlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x \ln b} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{\ln b} = \frac{a}{\ln b}$$

<u>Formel (G-14)$_2$:</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

<u>Beweis:</u>

Um die Regel von L´Hospital anwenden zu können, wird die Ableitung der Funktion e^x benötigt. Mit (DA-9) und (GA-1) folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\Rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

<u>Formel (G-15)$_1$:</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log_b(1+x)} = \ln b$$

<u>Beweis:</u>

Rechne mit (GA-5) den im Nenner stehenden Logarithmus zur Basis b auf den natürlichen Logarithmus um. Dann setze

$$\Phi(x) = 1 \qquad a = 1 \qquad \Psi(x) = \log_b(1+ax) = \log_b(1+x)$$

und wende (G-3) und (G-13)$_1$ an, um die Behauptung zu erhalten.

<u>Formel (G-15)$_2$:</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$

Beweis:

Setze $z := 1 + x$. Die Ableitung von z^m, wobei z eine beliebige reelle Zahl ist, ergibt sich nach »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 zu

$$\frac{dz^m}{dz} = mz^{m-1} \tag{1}$$

Die Ableitung nach x wird mit Hilfe der Kettenregel »*Bronstein*«, S. 397, (6.9) berechnet

$$\frac{d(1+x)^m}{dx} = m(1+x)^{m-1}$$

Damit folgt nach der Regel (GA-5) von L´Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{m(1+x)^{m-1}}{1} = m$$

Formel (G-16)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Beweis:

Setze in Formel (G-14)$_1$ $b = e$ (Übergang von dem Logarithmus zur Basis b zum natürlichen Logarithmus) und erhalte dadurch die Behauptung.

Formel (G-16)$_2$:

Behauptung:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k^n}{n!} = 0$$

Beweis:

Die Zahl n muss eine natürliche Zahl sein, da sonst die Fakultät $n!$ nicht auf elementare Weise gemäß (AH-4) definiert werden kann. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Zahl k positiv und beschränkt ist. Die Zahl k muss aber nicht natürlich sondern sie kann reell sein. Für $0 \le k \le 1$ ist die Behauptung trivial, weil für $0 < k < 1$ bereits der Zähler mit $n \to \infty$ gegen 0 geht, was zusätzlich durch den über alle Grenzen anwachsenden Nenner unterstützt wird. Für $k = 1$ gilt für den Zähler

$$\lim_{n \to \infty} 1^n = 1$$

und für den Nenner

$$\lim_{n\to\infty} n! \to \infty$$

Also gilt die Behauptung. Im folgenden wird daher nur der Fall $k > 1$ betrachtet. Zunächst wird gezeigt, dass der Grenzwert nicht mit Hilfe der Regel von l´Hospital berechnet werden kann. Gemäß der Definition (AH-4) der Fakultät $n!$ gilt mit »*Bronstein*«, S. 395, (6.5)

$$\frac{dn!}{dn} = (n-1)! \tag{2}$$

Weiter gilt

$$k^n = e^{n \ln k} \tag{3}$$

Mit »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 folgt

$$\frac{dk^n}{dn} = \ln k e^{n \ln k} = k^n \ln k \tag{5}$$

Mit den Gleichungen (2) und (5) liefert die Regel (GA-1) von L´Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^n \ln k}{(n-1)!} \tag{6}$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ liefert Gleichung (6) also nach wie vor einen unbestimmten Ausdruck der Form ∞/∞. Die Anwendung der Regel von L`Hospital kann beliebig oft fortgesetzt werden, ohne dass sich dieses Ergebnis ändert.
Abhilfe schafft die Formel von Stirling »*Bronstein*«, S. 479, (8.107b), welche eine für $n > 10$ gültige Näherung der Fakultät liefert

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right) \tag{7}$$

Das Zeichen $\approx$ bedeutet „ungefähr gleich“. Für $n \to \infty$ wird aus Gleichung folgende asymptotische Näherung ($\simeq$) gewonnen, weil die Brüche in der Klammer gegen Null gehen

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \tag{7a}$$

Weiter gilt

$$n^n = e^{n \ln n}$$

Damit wird aus Gleichung (7a)

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} = e^{n(\ln n - 1)} \sqrt{2\pi n} \tag{8}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3) und (8) in die Behauptung folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n(\ln k + 1 - \ln n)}}{\sqrt{2\pi n}} \tag{9}$$

Das Verhalten des Grenzwertes hängt vom Vorzeichen des Exponentialausdrucks im Zähler ab. Für Werte $\ln k + 1 > \ln n$ ist das Vorzeichen des Exponenten positiv. Diese Bedingung ist äquivalent mit $ek > n$. Da $k > 1$ voraussetzungsgemäß eine endliche Zahl ist, kehrt sich mit anwachsendem n das Vorzeichen des Exponenten im Zähler von (9) um und es wird negativ $n(\ln k + 1 \ln n) < 0$ und daher geht bereits die Exponentialfunktion im Zähler für $n \to \infty$ exponentiell gegen 0. Dieses Verhalten wird durch den über alle Grenzen anwachsenden Nenner verstärkt, womit die Richtigkeit von (G-16) für alle zulässigen Werte $0 < k \le \infty$ bestätigt ist.

Formel (G-17)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{10}$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt am einfachsten mit der Regel (GA-1) von L´Hospital. Nach »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 gilt

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

und

$$\frac{dx}{dx} = 1 \tag{11}$$

Da nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 $\cos 0 = 1$ ist, liefert die Regel von L´Hospital als Ergebnis die Behauptung.

Formel (G-17)$_2$:

Behauptung:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^{\mu} - 1}{\delta} = \mu$$

Beweis:
Der Grenzwert wird mit Hilfe der Regel (GA-1) von L´Hospital berechnet. Mit »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 folgt

$$\frac{d(1+\delta)^{\mu}}{d\delta} = \mu(1+\delta)^{\mu-1} \tag{12}$$

Ferner gilt

$$\frac{d\delta}{d\delta}=1$$

und daher folgt aus (GA-1)

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\mu(1+\delta)^{\mu-1}}{1}=\mu$$

<u>Formel (G-18):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

<u>Beweis:</u>

Er erfolgt mit Hilfe der Regel (GA-1) von L´Hospital. Aus »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 wird entnommen

$$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{für } x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad k=1,2,3,\ldots \tag{13}$$

Da nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 $\cos 0=1$ ist, folgt mit den Gleichungen (GA-1) und (13) die Behauptung, womit der Beweis erbracht ist.