Kommentar zu Musils Formeln für Differenzialquotienten

1. Vorbemerkung

Dieser Kommentar umfasst die Formeln (D-1) mit (D-61). Die restlichen Formeln von (D-62) bis (D-90) konnten wegen einer Erkrankung des Verfassers nicht kommentiert werden. Sie werden zu einem späteren Zeitpunkt nachgereicht.

2. Grundlagen

2.1 Begriff der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ einer Variablen x kann je nach Wahl mit den Symbolen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y', $f'(x)$ oder $Df(x)$ gekennzeichnet werden, wobei Musil auch die Bezeichnung $df(x)$ verwendet.

Es sei $f(x)$ eine Funktion der unabhängigen Variablen x. Ferner sei Δx ein inkrementeller Zuwachs der Variablen x. Infolge des Inkrements Δx erfährt die Funktion $f(x)$ gegenüber dem Wert an der Stelle x eine Änderung $f(x+\Delta x)$. Der Zuwachs des Funktionswertes infolge des Zuwachses Δx beträgt $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x ist definiert als »*Bronstein*«, S.394, (6.1)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} := \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{DA-1}$$

Die Funktion $y = f(x)$ kann geometrisch in einem ebenen $x-y-$Koordinatensystem als ebene Kurve gedeutet werden [vgl. hierzu »*Bronstein*«, S. 394, Abb. 6.1]. Die Ableitung lässt sich als Steigung dieser Kurve im Punkt (y,x) interpretieren. Wenn eine Funktion $y = f(x)$ im Punkt (y,x) eine endliche Ableitung besitzt, heißt sie dort <u>differenzierbar</u>. Beispielweise existiert für die Funktion $y = x\sin(1/x)$ an der Stelle $x = 0$ der Grenzwert nach Gleichung (DA-1) nicht und sie ist daher an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Der Prozess des Berechnens (oder Bildens) der Ableitung heißt *Differenzieren*. Ableitungen werden auch als *Differenzialquotienten* bezeichnet. Diese Bezeichnung verwendet Musil.

2.2 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Das Verfahren wird bei »*Bronstein*«, s. 5 geschildert. Es gilt für Sätze oder Formeln, die von natürlichen Zahlen n abhängen. Es soll eine Aussage für eine beliebige Zahl n bewiesen werden. Dann wird beim Verfahren der vollständigen Induktion angenommen, dass diese Aussage für n gültig ist. In einem nächsten Schritt wird gezeigt, dass die Gültigkeit der Aussage für die Zahl $n+1$ aus der Gültigkeit der Aussage für die Zahl n gefolgert werden kann. Schließlich muss noch gezeigt werden, dass die Aussage für eine natürliche Zahl $n_0 < n$ gilt. Meistens wird $n_0 = 1$ gewählt. Das Verfahren der vollständigen Induktion besteht also aus den folgenden Schritten:

1. Formulierung der Induktionsannahme für n, wobei vorausgesetzt wird, dass diese Annahme wahr ist.
2. Beweis der Wahrheit der Aussage beim Übergang von n auf $n+1$.
3. Verifikation der Aussage aus der Induktionsannahme für n_0.

2.3 Grundregeln für das Differenzieren

Für das Differenzieren gibt es folgende Grundregeln »*Bronstein*«, S. 395ff.

Konstantenregel: »*Bronstein*«, S.395, (6.4)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl[1]. Dann gilt für $y = f(x) = c$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} = c' = 0 \qquad \text{(DA-2)}$$

Faktorregel: »*Bronstein*«, S.395, (6.5)

$$\frac{d\left[cf(x)\right]}{dx} = c\frac{df(x)}{dx} \qquad \text{(DA-3)}$$

Ein konstanter Faktor c kann beim Differenzieren vor die Ableitung gezogen werden.

Im folgenden seinen $u(x), v(x)$ und $w(x)$ Funktionen der unabhängigen Variablen x, die an dieser Stelle differenzierbar sind-

Summenregel: »*Bronstein*«, S.395, (6.6)

---

[1] Die Zeichenkette $c \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass die Größe c ein Element der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist. Eine exakte Definition der reellen Zahlen ist schwierig (vgl. hierzu z. B. das Skriptum von Alber unter www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/analysis/pde/teaching/Skripten_Alber/ana1.pdf). Eine mehr anschauliche Erläuterung geht von einer Hierarchie der Zahlen aus. Allgemein bekannt sind die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. Ihre Gesamtheit wird als Menge $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\infty\}$ der natürlichen Zahlen bezeichnet. Die erste Erweiterung führt durch die Operation der Subtraktion (z. B. $5-7=-2$) auf die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{-\infty\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\infty\}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass die natürlichen Zahlen in den ganzen enthalten sind. Eine weitere Erweiterung ergibt sich aus der Operation des Dividierens. So ist der Bruch 2/3 keine ganze Zahl sondern eine rationale. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen umfasst neben den ganzen Zahlen die echten Brüche, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind. Die Operation des Wurzelziehens führt auf eine Erweiterung des Zahlbegriffes. Es gibt Wurzeln, die ihrerseits natürliche Zahlen oder positive rationale Zahlen sind. Beispiele sind $\sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt{9/25} = 3/5$. Für das erste Beispiel ergibt sich eine natürliche, für das zweite eine positive ganze Zahl. Jedoch kann die Operation des Wurzelziehens auf Lösungen führen, die weder eine natürliche noch eine positive rationale Zahl sind. Ein Beispiel dafür ist $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$. Eine derartige Zahl heißt irrational. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen umfasst alle natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen.

Für die Ableitung der Summe $y = u + v + w$ gilt

$$y' = u' + v' + w' \tag{DA-4}$$

Die Ableitung der Summe von mehreren Funktionen ist gleich der Summe von deren Ableitungen. Das gleiche gilt für Differenzen mehrerer Funktionen. Für den Spezialfall $w \equiv 0$ (das Zeichen $\equiv$ bedeutet „identisch“) gilt

$$y' = u' + v'$$

Produktregel: »*Bronstein*«, S.396, (6.7a) und S. 397 (6.7c)

Für die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen gilt

$$y' = \left(uv\right)' = u'v + uv' \tag{DA-5}$$

Es seien n differenzierbare Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegeben. Dann gilt für die Ableitung ihres Produktes

$$\left(u_1 u_2 \ldots u_n\right)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 u_2 \cdots u_i' \cdots u_n \tag{DA-5a}$$

Quotientenregel: »*Bronstein*«, S.397, (6.8)

Für die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen gilt unter der Voraussetzung $v \neq 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{DA-6}$$

Kettenregel: »*Bronstein*«, S.397, (6.9)

Es sei $y = v\left[u\left(x\right)\right]$ eine Funktion einer Funktion (Beispiel $y = e^{\sin x}$). Dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \tag{DA-7}$$

Ableitungen einfacher Funktionen: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Fall 1: $y = x^n \quad n \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{DA-8}$$

Sonderfälle:

$n = 1$

$$\frac{dx}{dx} = 1 \tag{DA-8a}$$

$n = -m \quad m > 0$

$$\frac{dx^{-m}}{dx} = -mx^{-m-1} \tag{DA-8b}$$

$n = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x}$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{DA-8c}$$

Fall 2: $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x \tag{DA-9}$$

Sonderfall: $y = e^{bx} \quad b \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{bx}}{dx} = be^{bx} \tag{DA-9a}$$

Fall 3: $y = a^x \quad a \in \mathbb{R} \quad a > 0$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a \tag{DA-9b}$$

Fall 4: $y = \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{DA-10}$$

Sonderfall: $y = \lg_a x \quad a \in \mathbb{R} \quad a > 0 \quad a \neq 1 \quad x > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\lg_a e = \frac{1}{x\ln a} \tag{DA-11}$$

Fall 5: $y = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \tag{DA-12}$$

Fall 6: $y = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \tag{DA-13}$$

Fall 7: $y = \operatorname{tg} x \quad$ für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \ k = 1,2,\ldots$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{DA-14}$$

Fall 8: $y = \cot x \quad$ für $x \neq k\pi \ k = 1,2,\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{DA-15}$$

Abschließend soll die Bildung der Ableitungen von Funktionen mit n unabhängigen Variablen angegeben werden. Es sei $u = f(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n)$ gegeben. Die *partielle Ableitung* nach der Variable x_i ist gegeben durch »*Bronstein*«, S.408, (6.35)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots x_i + \Delta x_i, \dots x_n) - f(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n)}{\Delta x_i} \tag{DA-16}$$

Bei der Berechnung der partiellen Ableitung nach der Variablen x_i werden also alle anderen $n-1$ Variablen als Konstanten behandelt. Von einer Funktion mit n Variablen können daher n partielle Ableitungen berechnet werden.

Die Funktion $u = f(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n)$ ist nach »*Bronstein*«, S. 410 in dem Punkt $P_0(x_{10,} x_{20,} \dots x_{i0}, \dots x_{n0})$ differenzierbar, wenn sich ihr vollständiger Zuwachs

$$\Delta u = f(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \dots x_{i0} + dx_i, \dots x_{n0} + dx_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots x_{i0}, \dots x_{n0})$$

beim Übergang zu einem benachbarten Punk $P(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \dots x_{i0} + dx_i, \dots x_{n0} + dx_n)$ mit den beliebig kleinen Größen $dx_1, dx_2, \dots dx_i, \dots dx_n$ sich von der Summe der partiellen Differenziale

$$\left(\frac{df}{dx_1} dx_1 + \frac{df}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{df}{dx_i} dx_i + \dots \frac{df}{dx_n} dx_n \right)_{x_{10}, x_{20}, \dots x_{i0}, \dots x_{n0}}$$

um eine Größe höherer Ordnung unterscheidet, die wesentlich kleiner ist als der Abstand $\overline{P}\overline{P}_0 = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots dx_i^2 + \dots dx_n^2}$. Eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit ist die Existenz aller partiellen Ableitungen. Sie ist jedoch nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit.

Für eine differenzierbare Funktion kann das *vollständige Differenzial* gebildet werden »*Bronstein*«, S.410, (6.42a)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \tag{DA-17}$$

3. Formeln von Musil

Zunächst ist zu bemerken, dass Musil die Produktregel (D-6) und die Quotientenregel (D-7) nicht an den Anfang seiner Betrachtungen stellt, was nicht systematisch ist. Die Produktregel (D-6) stimmt mit (DA-5) und die Quotientenregel (D-7) mit (DA-6) überein (s. die dort angegebenen Verweise auf »*Bronstein*«).

Formel (D-1)$_1$ ist identisch mit (DA-8)

Formel (D-1)$_2$ ist identisch mit (DA-9b)

Formel (D-2)$_1$ ist identisch mit (DA-9b), wenn dort $a = b$ gesetzt wird.

Formel (D-2)$_2$ ist identisch mit (DA-13)

Formel (D-3)$_1$ ist identisch mit (DA-9)

Formel (D-3)$_2$: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Formel (D-4)$_1$ identisch mit (DA-11), wenn $a = b > 0$ gesetzt wird. Der Vermerk $b > 0$ fehlt bei Musil.

Formel (D-4)$_2$ siehe »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1.

Formel (D-5) identisch mit (DA-10).

Bemerkung: Musil schreibt für die Funktion $\ln x$ anstelle der Buchstabenkombination „ln“ ein geschwungenes großes „L“.

Formel (D-8): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 für $x \neq (2k+1)\pi / 2 \quad k = 1,2,3,\ldots$

Formel (D-9): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 für $x \neq k\pi \quad k = 1,2,3,\ldots$

Formel (D-10):

Behauptung:

$y = \sec x \qquad y' = \tan x \sec x$

Beweis:

Nach »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 gilt

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

Dabei wurden für die Umformungen die Formeln »*Bronstein*«, S. 78, (2.70) und S.80, 2(.88) benützt.

Formel (D-11):

Behauptung:

$y = \operatorname{cosec} x \quad y' = -\cot x \operatorname{cosec} x$

Beweis:

Aus »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Umformung mit »*Bronstein*«, S. 78, (2.71) und S.80, (2.89) liefert

$$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{cosec} x$$

Formel (D-12): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 mit der Einschränkung $|x| < 1$

Formel (D-13): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 mit der Einschränkung $|x| < 1$

Formel (D-14): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Formel (D-15): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Formel (D-16): »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1.

Bemerkung:

In E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/InverseSecant.html findet sich die Einschränkung $x > 0$. Sie reicht aber nicht aus, wie im folgenden gezeigt wird. Korrekt muss folgende Formel für die Ableitung angegeben werden.

$$\frac{d \operatorname{arcsec} x}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \qquad |x| > 1$$

Beweis:

Wenn $y = \operatorname{arcsec} x$ ist, dann gilt

$$x = \sec y \tag{1}$$

Da die Funktion $\sec y$ die Periode 2π aufweist, kann die Betrachtung auf den Bereich $-\pi \le y \le \pi$ eingeschränkt werden, wobei die Stellen $y = -\pi/2$ und $y = \pi/2$ ausgeschlossen werden müssen, weil in ihnen die Funktion $x = \sec y$ divergiert.

Durch Differenzieren von (1) nach *x* folgt mit Hilfe der Kettenregel (DA-7) und Gleichung (DA-8a)

$$1 = \frac{d \sec y}{dy}\frac{dy}{dx} = \sec y \tan y \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Für die zweite Umformung wurde Gleichung (D-10) benützt. Aus Gleichung (2) ergibt sich für die gesuchte Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \tag{3}$$

Weiter folgt mit Gleichung $(T\text{-}2)_2$ die Identität

$$1 + \tan^2 y = \sec^2 y \tag{4}$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich

$$\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} \tag{5}$$

Damit folgt aus den Gleichungen (3), (4) und (5) für die gesuchte Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}\sec y} \tag{6}$$

Die in Gleichung (6) zu wählenden Vorzeichen müssen anhand der Gültigkeitsbereiche der Darstellung (5) gewählt werden. Die Vorzeichen der Terme $\operatorname{tg} y$ sowie $\sec y$ und daraus abgeleitet des Wurzelausdrucks werden in Tabelle 4.1 für die verschiedenen Subintervalle im Intervall $-\pi \le y \le \pi$ angegeben, wobei zu beachten ist, dass die Funktion $\tan y$ die Periode π und die Funktion $\sec y$ die Periode 2π aufweisen. Ferner geht die Funktion $\operatorname{tg} y$ in den Stellen $\pm\pi/2$ gegen Unendlich. Daher müssen diese Stellen vom Untersuchungsbereich ausgeschlossen werden.

Tabelle 4.1 Fallunterscheidungen für Vorzeichen in Gleichung (6)

Intervall	Vorzeichen $\operatorname{tg} y$	Vorzeichen $\sec y$	Vorzeichen $\sqrt{\sec^2 y - 1}$
$-\pi \le y < -\pi/2$	$\tan y < 0$	$\sec y < 0$	$+\sqrt{\sec^2 y - 1}$
$-\pi/2 < y \le 0$	$\tan y < 0$	$\sec y > 0$	$-\sqrt{\sec^2 y - 1}$
$0 \le y < \pi/2$	$\tan y > 0$	$\sec y > 0$	$+\sqrt{\sec^2 y - 1}$
$\pi/2 < y \le \pi$	$\tan y < 0$	$\sec y < 0$	$-\sqrt{\sec^2 y - 1}$

Aus Tabelle 4.1 folgt, dass Gleichung 6 für alle Teilintervalle gültig ist, wenn sie wie folgt angeschrieben wird.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|\sec y|\sqrt{\sec^2 y - 1}} \tag{6a}$$

Mit Hilfe von Gleichung (1) folgt schließlich die gesuchte Ableitung zu

$$\frac{d \operatorname{arcsec} x}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \qquad |x| > 1 \tag{7}$$

Sowohl bei Musil als interessanter Weise auch bei »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 fehlen in Gleichung (7) die Angaben, dass von der Variablen x der Betrag $|x|$ mit der Bedingung $|x| > 1$ zu bilden ist.

Formel (D-17): »*Bronstein*«, S.80, (2.88).

<u>Bemerkung:</u>

In E. Weisstein http://mathworld.wolfram.com/InverseCosecant.html findet sich die Einschränkung $x > 0$, die sowohl bei Musil als auch bei »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 fehlt. Die zu Gleichung (D-16) angestellten Überlegungen zeigen, dass für Formel (D-17) die Präzisierung

$$\frac{d \operatorname{arcosec} x}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \qquad |x| > 1$$

gilt.

Formel (D-18) folgt aus (D-12) und der Kettenregel (DA-7).

Formel (D-19) folgt aus (D-13) und der Kettenregel (DA-7).

Formel (D-20) folgt aus (D-14) und der Kettenregel (DA-7)

Formel (D-21) folgt aus (D-15) und der Kettenregel (DA-7)

Formel (D-22) folgt aus (D-16) und der Kettenregel (DA-7)

Formel (D23) folgt aus (D-17) und der Kettenregel (DA-7)

Bemerkung zu dem Formeln (D-22) und (D-23):

Wie bei den Formeln (D-16) und (D-17) angemerkt wird, müssen die Formeln (D-22) und (D-23) exakt wie folgt lauten

$$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{|\varphi(x)|\sqrt{\varphi(x)^2 - 1}} \qquad |\varphi(x)| > 1$$

bzw.

$$\frac{d\,\mathrm{arcosec}\,x}{dx} = -\frac{1}{|\varphi(x)|}\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)^2 - 1}} \qquad |\varphi(x)| > 1$$

Formel (D-24):

Diese Formel wird unter der Bezeichnung „Logarithmische Funktion“ eingeführt. Für den Logarithmus wählt Musil die Bezeichnung „lg“. Diese Bezeichnung ist laut »*Bronstein*«, S.8, (1.21) für den dekadischen Logarithmus vorgesehen. Musil gibt die Beziehung an

$$\frac{d}{dx}\lg\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Sie gilt jedoch nur für den natürlichen Logarithmus. (D-24) muss daher richtig lauten

$$\frac{d}{dx}\ln\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ verwendet Musil sonst immer ein großes, geschwungenes L [vgl. (G-16)$_1$, (D-5), (D-25)$_1$ (D-28), (D-29), (D-31)$_1$ und (D33)]. Die Schreibweise $\lg$ für den natürlichen Logarithmus ist daher inkonsistent.

Bemerkung zu Musils Eintrag „Funct. von Funct“:

Als nächstes führt Musil unter der Bezeichnung „Funktion von Funktion“ die Kettenregel (DA-7) an, wobei er die Schreibweise $z = z\left[y(x)\right]$ verwendet und dann die Kettenregel die Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \qquad \text{(DA-8a)}$$

annimmt. Formel (DA-8a) wird im folgenden verwendet.

Formel (D-25)$_1$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{1}{b}\ln(a+bx)\right]=\frac{dx}{a+bx}$$

Beweis:

Setzte $z=\ln y \quad y:=a+bx$ und wende die Kettenregel (DA-7), Gleichung (D-5), die Konstantenregel (DA-2) und die Faktorregel (DA-3) an. Damit gilt

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{1}{\ln z}b=\frac{1}{\ln(a+bx)},$$

wobei im zweiten Schritt die Rücksubstitution $z=a+bx$ durchgeführt wurde.

Formel (D-25)$_2$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}\right]=\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

Beweis:

Setze $z=\sqrt{a+bx} \quad y=a+bx$ und wende die Kettenregel (DA-7), die Konstantenregel (DA2) sowie (DA-8c) an. Damit gilt

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

Formel (D-26)$_1$:

Behauptung:

$$d\left[-\frac{1}{b(a+bx)}\right]=\frac{dx}{(a+bx)^2}$$

Beweis:

Setze $y:=a+bx$. Wende die Kettenregel (DA-7), Gleichung (DA-8b) mit $m=-1$ sowie die Konstantenregel (DA- 2) und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{b}\left[\frac{-1}{(a+bx)^2}\right]b=\frac{1}{(a+bx)^2}$$

Hierbei wurde die Rücksubstitution gedanklich sofort vorgenommen. Sie wird in den folgenden Beweisen in der gleichen Art unterdrückt.

Formel D-26)$_2$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)}{\beta}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

Beweis:

Setze $y:=\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}$. Wende Kettenregel (DA-7), Gleichungen (D-5), (DA-8c), Konstantenregel (DA-2) und Faktorregel (DA-3) an.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\frac{d\left[\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)\right]}{dx}&=\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\left(\beta+\frac{2\beta^2x}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\right)\\&=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}+\beta x}{\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\end{aligned}$$

Formel (D-27)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

Beweis:

Setze $y:=\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}$. Wende die Kettenregel (DA-7), Gleichung (D-8) und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha^2+(\beta x)^2}$$

Formel (D-27)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$$

Beweis:

Setze $y = \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}$. Wende die Kettenregel (DA-7), Gleichung (12) und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx} = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-(\beta x)^2}}$$

Bei Musil fehlt der Vorfaktor $1/\alpha$ .Das korrekte Ergebnis würde sich einstellen, wenn der Vorfaktor im Zähler von (D-27)$_2$ $1/\beta$ anstelle von $1/(\alpha\beta)$ lauten würde. Vermutlich handelt es sich um einen Flüchtigkeitsfehler.

Formel (D-28)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)\right] = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}$$

Beweis:

Setze $y := \ln\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)$. Wende Kettenregel (DA-7), Gleichung (D-10) Quotientenregel (DA6) und Faktorregel (DA-3) an.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right) &= \frac{1}{2\alpha\beta}\frac{1}{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}}\frac{(\alpha-\beta x)\beta-(\alpha+\beta x)(-\beta)}{(\alpha-\beta x)^2}\\ &= \frac{1}{2\alpha\beta}\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta x)(\alpha-\beta x)} = \frac{1}{\alpha^2-(\beta x)^2}\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung des Nenners wurde Gebrauch gemacht von Gleichung (AH-2).

Formel (D-28)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right] = \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Beweis:

Setze $y := \sqrt{a+bx^2}$. Wende Kettenregel (DA-7), Gleichung (DA-8c) und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right]=\frac{1}{b}\frac{2bx}{2\sqrt{a+bx^2}}=\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Formel (D-29):

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2b}\ln\left(a+bx^2\right)\right]=\frac{x}{a+bx^2}$$

Beweis:

Setze $y:=\ln\left(a+bx^2\right)$. Wende Kettenregel (DA-7), Gleichungen (DA-8) mit $m=2$ und Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2b}\ln\left(a+bx^2\right)\right]=\frac{1}{2b}\frac{2bx}{a+bx^2}=\frac{1}{a}\frac{x}{a+bx^2}$$

Formel (D-30)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Beweis:

Setze $y:=\sqrt{a+bx^2}$. Wende Kettenregel (DA-7), die Quotientenregel (DA-6), Gleichung (DA-8) mit $n=-1/2$, bzw. beim Nachdifferenzieren mit $n=2$ und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{1}{a}\frac{\sqrt{a+bx^2}-x\frac{1}{2\sqrt{a+bx^2}}2bx}{a+bx^2}$$

Erweitere auf der rechten Seite mit $\sqrt{a+bx^2}$. Damit wird

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{1}{a}\frac{a+bx^2-bx^2}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Formel (D-30)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{x}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Beweis:

Setze $y := \sqrt{a+bx^2}$. Wende Kettenregel (DA-7), Gleichung (DA-8) mit $n = -1/2$, bzw. beim Nachdifferenzieren mit $n = 2$ und die Faktorregel (DA-3) an.

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{1}{b}\frac{1}{2\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}2bx = \frac{x}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Formel (D-31)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[x\ln x - x\right] = \ln x$$

Beweis:

Wende Produktregel (DA-5), (DA-10) und Summenregel (DA-4a) an.

$$\frac{d}{dx}\left[x\ln x - x\right] = x\frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$$

Bemerkung: Bei Formel (D-31)$_1$ handelt es sich nicht um eine Anwendung der Kettenregel (DA—7) oder in Musils Terminologie um eine „Function einer Function“.

Formel (D-31)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[-\ln\cos u\right] = \tan u$$

Beweis:

Setze $y := \cos u$. Wende Kettenregel (DA-7) und Gleichung (DA-13) an.

$$\frac{d}{du}\left[-\ln\cos u\right] = -\frac{1}{\cos u}\left(-\sin u\right) = \tan u$$

Formel (D-32)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\ln\sin u\right] = \cot u$$

Beweis:

Setze $y = \sin u$. Wende Kettenregel (DA-7) und Gleichung (DA-12) an.

$$\frac{d}{du}\left[\ln\sin u\right] = \frac{1}{\sin u}\cos u = \cot u$$

Formel (D-32)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\beta\tan u}{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{\alpha^2\cos^2 u+\beta^2\sin^2 u}$$

Beweis:

Hier ist die Kettenregel (DA-7) zweimal anzuwenden. Setze $v:=\frac{1}{\alpha\beta}\arctan y$ und $y:=\frac{\alpha\tan u}{\beta}$ Dann führt die Kettenregel auf

$$\frac{dv}{du}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} \tag{1}$$

Gleichung (1), »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 (für die Ableitung der Funktion $\arctan x$) und Gleichung (DA-14) führen mit der Produktregel (DA-3) auf

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\beta\tan u}{\alpha}\right)\right]&=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta\tan u}{\alpha}\right)^2}\frac{1}{\cos^2 u}\frac{\beta}{\alpha}\\&=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta\tan u}{\alpha}\right)^2}\frac{1}{\cos^2 u}\\&=\frac{1}{\alpha^2\cos^2 u+\beta^2\sin^2 u}\end{aligned}$$

Formel (D-33):

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}\right)\right]=\frac{1}{\alpha^2\cos^2 u-\beta^2\sin^2 u}$$

Beweis:

Wie bei Formel (D-32)$_2$ ist die Kettenregel zwei mal anzuwenden. Setze $v:=\frac{1}{2\alpha\beta}\ln y$ und $y:=(\alpha+\beta\tan u)/(\alpha-\beta\tan u)$. Wende die Kettenregel (DA-7), Gleichung (D-10), die Faktorregel (DA-3) und die Summenregel (DA-4a) an.

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}\right)\right]=\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{1}{\dfrac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}}\frac{(\alpha-\beta\tan u)\dfrac{\beta}{\cos^2 u}-(\alpha+\beta\tan u)\left(-\dfrac{\beta}{\cos^2 u}\right)}{(\alpha-\beta\tan u)^2}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{\alpha-\beta\tan u}{\alpha+\beta\tan u}\frac{\beta}{\cos^2 u}\frac{2\alpha}{(\alpha-\beta\tan u)^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 u}\frac{1}{(\alpha+\beta\tan u)(\alpha-\beta\tan u)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2\cos^2 u-\beta^2\sin^2 u}$$

Bei der letzten Umformung des Nenners wurde Gleichung (AH-2) angewendet.

Formeln (D-34) und (D-35): Spezialfälle von »*Bronstein*«, S. 410, (6.42a) für $n=2$ und $n=3$.

Bei Musil fehlen folgende Hinweise:

> Die Funktionen $f(x,y)$ bzw. $F(x,y,z)$ müssen differenzierbar sein (vgl. hierzu »*Bronstein*«, S. 410, Abschnitt 6.2.2.1.1). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, heißt *dz* bzw. *dn* vollständiges Differenzial.

Formel (D-36) stellt lediglich eine andere Schreibweise von (D-34) dar.

Formel (D-37) ist unvollständig, da nur die Funktion

$y = f\,[u(z), v\,(z_1)]$

mit

$z = z\,(x)$

$z_1 = z_1\,(x)$

angegeben wird und nicht deren vollständiges Differenzial.

Formel (D-38): »*Bronstein*«, S. 413, (6.53a) und (6.53c).

Dabei werden in »*Bronstein*« die Symbole $F_x := \partial F/\partial x$ und $F_y := \partial F/\partial y$ verwendet. In »*Bronstein*« wird vermerkt, dass (D-38) bzw. (6.53c) gilt, falls $F_y \neq 0$.

Formel(D-39): »*Bronstein*«, S. 411, (6.45)

Formel (D-40)[1]

Zunächst gibt Musil folgende Definition

$$D(y)=\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Da in (1) das Symbol D den Differenzialoperator repräsentiert, wird besser geschrieben

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

Dies gilt umso mehr, als Musil in den folgenden Formeln genau diese Schreibweise verwendet.

Behauptung:

$Dx^{\mu} = \mu x^{\mu-1}$

Dies stimmt vollkommen mit $(D1\text{-}1)_1$ bzw. mit (DA-8) überein.

Formel $(D\text{-}40)_2$: »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3.

Formel (D-41):

Behauptung:

$$D^n (a + b\,x)^{\mu} = \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - [n-1])b^n (a + bx)^{\mu-n}$$

Beweis: Setze *z:=a+bx* und wende für jeden Differenziationsschritt in $(D\text{-}40)_z$ die Kettenwege an mit

$$\frac{dz}{dx} = b$$

Dann ergibt sich die Behauptung.

Formel (D-42):

Behauptung:

$$D^n \frac{1}{a + b\,x} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n \cdot b^n}{(a + b\,x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!\, b^n}{(a + b\,x)^{n+1}}$$

wobei die zweite, bei Musil fehlende Schreibweise kompakter ist.

Beweis:

Zunächst wird die Behauptung umgeschrieben

$$D^n \left(a + bx\right)^{-1} = \left(-1\right)^n n!\, b^n \left(a + bx\right)^{-n-1}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion von *n-1* nach *n* und *n*-maliges Anwenden der Kettenregel (DA-7). Dazu wird *z:= a+bx* gesetzt. Es gilt

$$\frac{dz}{dx} = b \tag{2}$$

Formulierung der Induktionsannahme für *n-1*:

$$D^{n-1}(a+bx) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,b^{n-1}(a+bx)^{-n+1} \tag{3}$$

Beweis für den Übergang von *n-1* nach *n*:

$$D^n(a+bx)^{-1} = D\left[D^{n-1}(a+bx)^{-1}\right]$$

Durch Einsetzen von (3) und Anwenden der Kettenregel (DA-7) ergibt sich

$$D^n(a+bx) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,b^{n-1}(a+bx)^{-n+1}(-1)nb(a+bx)^{-1} = (-1)^n\, n!\,b^n(a+bx)^{-n}$$

Das ist genau die Behauptung.

Verifikation für $n_0 = 1$:

$$D(a+bx)^{-1} = -b(a+bx)^{-2}$$

Das ist das korrekte Ergebnis, das sich direkt aus (DA-8b) und der Kettenregel (DA-7) ergibt.

Formel (D-43):

Behauptung:

$$D^n \log x = M\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots (n-1)}{x^n}$$

Diese Formel lässt sich kompakter schreiben

$$D^n \log x = M\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Die Größe M bezeichnet Musil als Modul des logarithmischen Systems. Er wird von Musil nicht näher angegeben.

Bemerkung zum Modul für Logarithmen mit verschiedenen Basen a und b, wobei die Basen die Bedingungen $a>0, a\neq 1$ und b>0, b≠1 erfüllen müssen. Es sei $x>0$ eine beliebige positive reelle Zahl. $b>0, b\neq 1$Dann gilt nach »*Bronstein*«*,* S.9, (1.20)

$$\log_a x = M\log_b x \tag{1}$$

$$M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{2}$$

Beweis:
In der Behauptung steht links der dekadische Logarithmus der Basis $a=10$. Beim Differenzieren ist es zweckmäßig, den dekadischen auf den natürlichen Logarithmus mit der Basis $b=e$ (Eulersche Zahl) zurückzuführen. Damit gilt nach (2)

$$M = \frac{1}{\ln 10} \qquad (3)$$

In »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3 findet sich folgende Formel

$$D^n \log_a x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} \frac{1}{x^n} \qquad (4)$$

Wird in (4) $a = 10$ gesetzt und (3) berücksichtigt, so ergibt sich genau die Behauptung.

Formel (D-44):

Behauptung:

$$D^n \log(a+bx)n = M \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot \ldots n-1)b^n}{(a+bx)^n}$$

Diese Formel lässt sich wieder kompakter schreiben

$$D^n \log(a+bx) = M \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, b^n}{(a+bx)^n} \qquad (1)$$

Dabei ergibt sich der Modul M aus (3) im Beweis zu (D-43).

Beweis:
Die Formel ergibt sich aus (D-43), wenn dort x ersetzt wird durch $z := a + bx$ und mit der Ableitung

$$\frac{dz}{dx} = b$$

die Kettenregel *n*-mal ausgeweitet wird, was in (1) auf dem Faktor b^n führt.

Formel (D-45): »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle6.3

Formel (D-46): In »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3 findet sich folgende Formel

$$D^n e^{kx} = k^n e^{kx}$$

Aus ihr folgt die Behauptung mit $k = \beta$.

Bemerkung: Im Manuskript von Musil ist die Größe β im Exponenten der Funktion $e^{\beta x}$ schlecht lesbar. Dort kann β mit dem Buchstaben b verwechselt werden. Aus dem Kontext geht eindeutig hervor, dass Musil β und nicht b gemeint hat.

Formel (D-47): »*Bronstein*«, S.402, Tabelle 6.3

Formel (D-48): »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3

Formel (D-49):

Behauptung:

$$D^n (au + bv) = aD^n u + bD^n v$$

Die Größen *a* und *b* sind reelle Zahlen, die Größen u und *v* Funktionen der unabhängigen Variablen (z.B. *x*). Diese Funktionen müssen *n*-mal differenzierbar sein.

<u>Beweis</u>:
Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.
Induktionsbehauptung für *n*-1:

$$D^{n-1}au + bv) = aD^{n-1}u + bD^{n-1}v$$

Induktionsschritt von *n*-1 nach *n*:

$$\begin{aligned} D^{n}(au + bv) &= D(aD^{n-1}u + bD^{n-1}v) \\ &= aD^{n}n + bD^{n}v \end{aligned} \tag{1}$$

Verifikation für n_0=1

$$D(au + bv) = aDn + bDv \tag{2}$$

(2) ergibt sich sowohl aus (1) für $n = 1$ als durch direktes Differenzieren.

<u>Formel (D-50):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$D^{n}(u \cdot v) = (n_0)u \cdot D^{n}v + (n)_1 Du \cdot D^{n-1}v + (n)_2 D^2u \cdot D^{n-2}v + \dots \tag{1}$$

Die Größen $(n)_0, (n)_1, (n)_2, \dots$ usw. sind bei Musil nicht angegeben, so dass (1) nicht ausgewertet werden kann. In »*Bronstein*«, S.401, (6.23) findet sich folgende geschlossene Formel

$$D^{n}(uv) = \sum_{m=o}^{n} \binom{n}{m} D^{m}uD^{n-m}v \tag{2}$$

(2)

wobei $D^0u = u$ und $D^0v = v$ sind. Für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ gelten die Beziehungen (AH-3). Aus (2) folgt, dass in (1) die Größe $(n)_m$ $m < n$ wie folgt berechnet werden kann

(3)

<u>Formel (D51):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$D^{n}\frac{\ln x}{x} = \frac{(-1)^{n}n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right]$$

<u>Beweis:</u>

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Die Induktionsbehauptung ist für *n* identisch mit der oben stehenden Behauptung.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Durch Anwenden der Produktregel (DA-5) sowie von (DA-8b) und (DA-10) ergibt sich

$$\begin{aligned}D^{n+1}\frac{\ln x}{x} &= \frac{(-1)^n n!(-n-1)}{x^{n+2}}\left[\ln x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\frac{1}{x}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}\left[\ln x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]\end{aligned}$$

Das entspricht der Behauptung, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird.

Verifikation für $n_0=1$:
Direktes Differenzieren von $\ln x / x$ liefert

$$D^1 x = \frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(-\ln x+1)=\frac{(-1)^1}{x^2}\left(\ln x-\frac{1}{1}\right) \tag{1}$$

Aus der Behauptung folgt für $n=1$:

$$D^1\frac{\ln x}{x}=\frac{(-1)^1}{x^2}\left(\ln x-\frac{1}{1}\right) \tag{2}$$

Gln. (1) und (2) stimmen überein, womit der Beweis geschlossen ist.

Formel (D-52):

Behauptung:

$$\begin{aligned}D^n \sec x = &\left[(n)_1 \sec x^{(n-1)}-(n)_3 \sec x^{(n-3)}-(n)_5 \sec x^{(n-5)}-\cdots\right]\tan x\\ &+(n)_2 \sec x^{(n-2)}-(n)_4 \sec x^{(n-4)}+(n)_6 \sec x^{(n-6)}\cdots\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Die Koeffizienten $(n)_1,(n)_2,\cdots$ sind bei Musil nicht definiert, so dass (D-52) nicht ausgewertet werden kann. Ferner ist die Schreibweise $(n)_1,\ldots$ unnötig aufwendig. Einfacher ist es, die Klammern wegzulassen und nur die indizierten Größen[2] $n_1,\ldots$ anzuschreiben. Das wird im folgenden für die Formeln (D-52), (D-53) und (D-55) so gehandhabt.

2. Die Schreibweise $\sec x^{(n-1)},\sec x^{(n-2)},\cdots$ ist nicht eindeutig und ungebräuchlich. Grundsätzlich lässt sie folgende Interpretationen zu

---

[2] Eine Verwechslung mit der Ordnungszahl n ist zu vermeiden.

$$\sec x^{(n-1)} = \begin{cases} \sec x^{n-1} \\ D^{n-1} \sec x \\ \sec^{n-1} x \end{cases}$$

3. Die erste Interpretation $\sec x^{(n-1)} = \sec x^{n-1}$ kann auf keinen Fall stimmen, weil der Prozess des Differenzierens beliebiger Ordnung eine Folge von linearen Operationen darstellt, so dass dadurch unmöglich der nichtlineare Ausdruck $\sec x^{n-1}$ entstehen kann. Die beiden anderen Interpretationen sind grundsätzlich möglich. Jedoch zeigen Untersuchungen zur Formel (D-56), dass für sie nur die zweite Interpretation $\arctan x^{(n-1)} \equiv D^{n-1} \arctan x$ zu richtigen Ergebnissen führt. Da ferner hier nicht mitgeteilte Untersuchungen zeigen, dass die dritte Interpretation bei allen betrachteten Formeln nicht zu korrekten Ergebnissen führt, werden in allen folgenden Formeln nur die Interpretation 2 herangezogen. Die Formeln werden auf diese Schreibweise umgestellt.

4. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es extrem unschön und verwirrend, dass Musil in den Formeln (D-52) bis (D-56) unterschiedliche Notationen für die Ableitungen der Ordnung *n* gebraucht.

5. Eine Beziehung von der Form der Behauptung wird in der Mathematik als Rekursionsformel bezeichnet. In den Spezialfällen der Formeln (D-52) mit (D-56) gestatten diese Rekursionsformeln die Berechnung der Ableitung der beliebigen Ordnung *n* aus bekannten Ableitungen niedriger Ordnungen.

Umgestellte Behauptung:

$$\begin{aligned} D^n \sec x = {} & \left[n_1 D^{n-1} \sec x - n_3 D^{n-3} \sec x + n_5 D^{n-5} \sec x - \cdots \right] \tan x \\ & + n_2 D^{n-2} \sec x - n_4 D^{n-4} \sec x + n_6 D^{n-6} \sec x - \cdots \end{aligned}$$

Analyse:

Da Musil keine Berechnungsvorschriften für die Koeffizienten $n_1, n_2, \cdots$ angegeben hat, ist ein Beweis von (D-52) nicht möglich. Aus diesem Grund werden die ersten beiden Ableitungen der Funktion $\sec x$ aus einer verlässlichen Internetquelle angegeben. Sodann werden die gleichen Ableitungen durch Auswerten der Behauptung ermittelt und mit den analytisch berechneten verglichen.

Analytische ermittelte Ableitungen:
Nach http:functions.wolfram.com/EelementaryFunctions/Sec/20/01 gilt für die ersten beiden Ableitungen (Formeln 01.11.20.0001.01 und 01.11.20.0002.01)

$$D^1 \sec x = \sec x \tan x \tag{1}$$

$$D^2 \sec x = \sec x \left(\tan^2 x + \sec^2 x \right) \tag{2}$$

Auswertung von Musils Formel für die Fälle n=1, *n*=2 *und n*=3:

Zunächst wird $D^0 \sec x = \sec x$ gesetzt. Aus der Behauptung folgt für n=1

$$D^1 \sec x = n_1 \sec x \tan x \tag{6}$$

(6) stimmt mit der richtigen Formel (1) überein, wenn

$$n_1 = 1 \tag{7}$$

gesetzt wird.

Für n=2 folgt aus der Behauptung mit $n_1 = 1$ zunächst

$$D^2 \sec x = D^1 \sec x \tan x + n_2 D^0 \sec x \tag{8}$$

Da der erste Term auf der rechten Seite gleich der ersten Ableitung der Funktion $\sec x$ ist, ergibt sich unter Beachtung von (1) und (7)

$$D^2 \sec x = \sec x \tan x + n_2 \sec x \tag{9}$$

Die Beziehung (9) kann durch keine Wahl der reellen Zahl n_2 so angepasst werden, dass sie mit der korrekten Formel (2) übereinstimmt. Daher liefert die Behauptung für alle möglichen Werte von n_2 eine falsche zweite Ableitung.

Schlussfolgerung:

Die Formel (D-52) ist für die Berechnung der zweiten Ableitung falsifiziert. Daher ist diese Formel insgesamt nicht richtig. .

Formel (D-53):

Behauptung:

$$\begin{aligned} D^n \tan x = {} & \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)}{\cos x} + \left(n_1 D^{n-1} \tan x - n_3 D^{n-3} \tan x + \cdots\right) \tan x \\ & + n_2 D^{n-2} \tan x - n_4 D^{n-4} \tan x + \cdots \end{aligned}$$

Bemerkung:
Die Koeffizienten $n_1, n_2, \ldots$ sind wie in (D-52) nicht definiert, so dass (D-53) nicht ausgewertet werden kann.

Analyse:

Analytisch berechnete Ableitungen:

Nach http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Tan/20/01/ gilt (Formeln 01.08.20.0001.01 und01.08.20.0002.01)

$$D^1 \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \tag{1}$$

$$D^2 \tan x = 2\sec^2 x \tan x \tag{2}$$

Auswertung der Behauptung:

Für die weitere Untersuchung wird zunächst der Ausdruck $\sin(n\pi/2 + x)$, $n = 1,2,\ldots$ untersucht. Nach (T-28) gilt

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos x + \cos\frac{n\pi}{2}\sin x \tag{3}$$

Wegen der Periode 2π der trigonometrischen Funktionen braucht (3) nur für die Werte $n = 0,1,2,3$ ausgewertet zu werden.

Tabelle 4.2 Werte der trigonometrischen Funktionen für die Argumente $n\pi/2$

n	$\sin\frac{n\pi}{2}$	$\cos\frac{n\pi}{2}$
0	0	1
1	1	0
2	0	-1
3	-1	0

Für beliebige Werte von $n = 1,2,,\ldots$ gelten daher mit $k = 1,2,\ldots$ folgende Beziehungen

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{k-1} & \text{für } n = 2k-1 \\ 0 & \text{für } k = 2k \end{cases} \tag{4}$$

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k-1 \\ (-1)^k & \text{für } n = 2k \end{cases} \tag{5}$$

Damit folgt aus (3), (4) und (5) für beliebige *n* die Darstellung

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) = \begin{cases} (-1)^{k-1}\cos x & \text{für } n = 2k-1 \\ (-1)^k \sin x & \text{für } n = 2k \end{cases} \tag{6}$$

Für $n = 1$ folgt aus der Behauptung

$$D^1 \tan x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos x} + (n_1)\tan^2 x \tag{7}$$

Nach (6) wird

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \tag{8}$$

Damit ergibt sich aus (7)

$$D^1 \tan x = 1 + n_1 \tan^2 x$$

Wird $n_1 = 1$ gesetzt, so folgt das richtige Ergebnis

$$D^1 \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Auswertung für $n = 2$ mit n_1=1:

$$D^2 \tan x = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos x} + \tan^2 x + n_2 \tan x \tag{9}$$

Aus (6) folgt

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \tag{10}$$

und damit ergibt sich aus (9)

$$D^2 \tan x = -\tan x + \tan^2 x + n_2 \tan x \tag{11}$$

Weiter wird gesetzt

$$a := -1 + n_2$$

Damit folgt schließlich aus (11)

$$D^2 \tan x = (a + \tan x)\tan x \tag{12}$$

Es stellt sich die Frage, ob durch Anpassung der noch unbestimmten Konstanten a bzw. von n_2 erzwungen werden kann, dass die rechte Seite von (12) mit der rechten Seite der analytischen Lösung (2) übereinstimmt.

$$(a + \tan x)\tan x \stackrel{?}{=} 2\sec^2 x \tan x \tag{13}$$

Damit die Beziehung (13) richtig ist, muss gelten

$$a + \tan x = 2\sec^2 x \tag{14}$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Beziehung (14) für keine Wahl der reellen Zahlen a bzw. n_2 erfüllt werden kann. Dies bedeutet, dass aus der Behauptung die zweite Ableitung der Funktion $\tan x$ nicht korrekt berechnet werden kann. Damit ist (D-53) für den Fall $n = 2$ falsifiziert und damit insgesamt nicht korrekt.

Formel (D-54):

Behauptung:

$$D^{n+2}\arcsin x = \frac{(2n+1)xD^{n+1}\arcsin x + n^2 D^n \arcsin x}{1-x^2}$$

Zunächst wird darauf hingewiesen, dass $1/\left(1-x^2\right)$ gleich dem Quadrat der ersten Ableitung der Funktion $\arcsin x$ ist. Daher kann die Behauptung auch wie folgt angeschrieben werden

$$D^{n+2}\arcsin x = \left(D^1 \arcsin x\right)^2 \left[(2n+1)xD^{n+1}\arcsin x + n^2 D^n \arcsin x\right] \qquad (1)$$

<u>Analyse</u>

Zunächst werden die ersten drei analytisch bestimmten Ableitungen der Funktion $\arcsin x$ angegeben. Unter http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/ArcSin/20/01/ (Formeln 01.12.20.0001 und 01.12.20.0002) findet sich

$$D^1 \arcsin x = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}} \qquad (2)$$

$$D^2 \arcsin x = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \qquad (3)$$

Für die dritte Ableitung folgt mit der Quotientenregel (DA-6), der Produktregel (DA-5) und der Kettenregel (DA-7)

$$\begin{gathered} D^3 \arcsin x = D^1\left(D^2 \arcsin x\right) = D^1\left(\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\right) = \\ \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2} - x\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{1/2}(-2x)}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{2x^2+1}{\left(1-x^2\right)^{5/2}} \end{gathered} \qquad (4)$$

Als nächstes wir die Rekursionsformel (1) ausgewertet. Für den Fall $n=0$ ergibt sich aus (1)

$$D^2 \arcsin x = \left(D^1 \arcsin x\right)^2 xD^1 \arcsin x$$

Durch Einsetzen von (2) folgt

$$D^2 \arcsin x = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \qquad (5)$$

Da (5) identisch mit (3) ist liefer die Rekursionsformel das korrekte Ergebnis.

Auswertung von (1) für den Fall $n=1$:

$$D^3 \arcsin x = \left(D^1 \arcsin x\right)^2 \left[3xD^2 \arcsin x + D^1 \arcsin x\right] =$$

$$\left(1-x^2\right)^{-1}\left[3x\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{2x^2+1}{\left(1-x^2\right)^{5/2}} \tag{6}$$

(6) stimmt mit der analytisch berechneten Formel (5) überein.

<u>Schlussfolgerung:</u>

Die Behauptung, das ist die Rekursionsformel (1) liefert für die beiden (einfachen) Fälle $n = 0$ und $n = 1$ Ergebnisse, die mit den beiden analytische berechneten Ableitungen (3) und (4) identisch sind. Dies macht die Annahme plausibel, dass diese Rekursionsformel richtig ist. Es handelt sich hierbei allerdings um eine bloße Vermutung und keinen mathematischen Beweis. Der naheliegende Versuch, die Behauptung durch vollständige Induktion zu beweisen, ist gescheitert. Auch war es dem Verfasser nicht möglich, in der Literatur eine Quelle oder gar einen Beweis für (D-54) zu finden.

<u>Formel (D-55):</u>

<u>Behauptung[3]:</u>

$$D^{n+1} \arcsin x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\left(1-x\right)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1\cdot n_1}{2n-1}\frac{1-x}{1+x}+\frac{1\cdot 3\cdot n_2}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot n_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots \end{array}\right\}$$

Hier ist einmal mehr darauf hinzuweisen, dass Musil die Berechnungsvorschriften für die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ nicht angibt. Daher ist die Formel weder generell auswertbar noch beweisbar.

<u>Analyse:</u>

Die analytisch berechneten drei ersten Ableitungen der Funktion $\arcsin x$ werden vom Kommentar der Formel (D-54) übernommen. Sie lauten

$$D^1 \arcsin x = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}} \tag{1}$$

$$D^2 \arcsin x = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$

$$D^3 \arctan x = \frac{2x^2+1}{\left(1-x^2\right)^{5/2}} \tag{3}$$

Als nächstes wird (D-55) für die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ ausgewertet.

---

[3] Beim Lesen der Behauptung ist zu beachten, dass in der geschweiften Klammer die Differenz von zwei Ausdrücken steht, die mit dem vor der geschweiften Klammer stehenden Ausdruck multipliziert wird. Das verwendete mathematische Textverarbeitungssystem hat keine bessere Darstellung ermöglicht.

Fall $n=1$:

$$D^2 \arctan x = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}\left\{1-\frac{n_1}{1}\frac{1-x}{1+x}\right\} \tag{4}$$

Probeweise wird in (4) $n_1 = 1$ gesetzt. Dann folgt aus (4)

$$D^2 \arcsin x = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}\frac{2x}{1+x} = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \tag{5}$$

Gleichung (5) stimmt vollkommen mit dem korrekten Ergebnis (5) überein.

Fall $n=2$

$$D^3 \arcsin x = \frac{1\cdot 3}{4(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}\left\{1-\frac{1}{3}\frac{1-x}{1+x}+\frac{1\cdot 3n_2}{3\cdot 1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right\}$$

Der Faktor 3 wird in die geschweifte Klammer hinein multipliziert und der Term $(1+x)^2$ im Nenner des dritten Ausdrucks in der geschweiften Klammer wird vor diese gezogen.

$$D^3 \arcsin x = \frac{1}{4\left(1-x^2\right)^2\sqrt{1-x^2}}\left\{3(1+x)^2-\left(1-x^2\right)+3n_2(1-x)^2\right\} \tag{6}$$

Als nächstes werden die Ausdrücke in der geschweiften Klammer ausmultipliziert und anschließend wird nach Potenzen von x geordnet. Für den Inhalt der geschweiften Klammer folgt dadurch

$$\{\cdots\} = \left\{2+3n_2+6x(1-n_2)+x^2(4+3n_2)\right\} \tag{7}$$

Der Vergleich mit dem bekannten exakten Ergebnis (3) zeigt, dass in (6) der in x lineare Term verschwinden muss. Daher folgt aus (7), dass $n_2 = 1$ gelten muss. Damit wird aus (7)

$$\{\cdots\} = \left\{5+7x^2\right\} \tag{8}$$

Durch Einsetzen von (8) in (6) folgt das Endergebnis

$$D^3 \arcsin x = \frac{7x^2+5}{4\left(1-x^2\right)^{5/2}} \tag{10}$$

Der Vergleich mit der exakten Formel (3) zeigt, dass die Behauptung für den Fall $n=2$ auf ein falsches Ergebnis führt.

Schlussfolgerung

Die Formel (D-55) liefert für die Fälle $n=0$ und $n=1$ richtige Ergebnisse. Dabei konnte die Festlegung $n_1=1$ nur aufgrund des bekannten exakten Ergebnisses (2) erfolgen. Für den Fall $n=2$ versagt die Formel (D-55) und sie ist damit falsifiziert.

<u>Abschlussbemerkungen zu den Formeln (D-52), (D-53) und (D-55):</u>

Diese drei Formeln enthalten alle unbestimmte Koeffizienten $(n)_1,(n)_2$ usw.. Dies legt die Vermutung nahe, dass Musil diese Formeln entweder selbst abgeleitet (was der Verfasser für unwahrscheinlich hält) oder aus bekannten Quellen übernommen hat. Dabei sind ihm offenkundige Fehler unterlaufen, weil diese Formeln samt und sonders für bestimmte Anwendungsfälle falsifiziert wurden.

<u>Formel (D-56):</u>

<u>Vorbemerkung:</u>

Bei der Analyse der beiden Formeln (D-56) und (D-57) habe ich dankenswerter Weise wesentliche Unterstützung durch das Fachgebiet „Systemzuverlässigkeit und Maschinenbau“ der Technischen Universität Darmstadt (Leiter Professor Dr.-Ing. Holger Hanselka) erhalten. Die Herren Dipl.-Ing. Sebastian Buckert, Dipl.-Wirtsch.-Ing. Thorsten Hering und Dipl.-Ing. Christian Thyes haben mit Hilfe der „Symbolic Math Toolbox“ des Softwaresystems Matlab eine umfangreiche Studie zu den Formeln (D-56) und (D-57) durchgeführt. Insbesondere verdanke ich dieser Studie auch den Hinweis, dass es sich bei der Formel (D-56) um eine Rekursionsformel handelt, mit deren Hilfe eine Ableitung höherer Ordnung durch eine Kombination von Ableitungen niedrigerer Ordnungen berechnet werden kann. Diese Erkenntnis gilt genau so für die Formeln (D-52), (D-53) und (D-54).

<u>Behauptung:</u>

$$D^{n+1}\arctan x=-\frac{2nxD^{n}\arctan x+n(n-1)D^{n-1}\arctan x}{1+x^2}$$

<u>Analyse:</u>

Der Internetquelle http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/ArcTan/, Formeln 01.14.20.0001.01 und 01.14.20.0002.01 werden die beiden folgenden Formeln für die ersten beiden Ableitungen entnommen

$$D^1\arctan x=\frac{1}{1+x^2}\tag{1}$$

$$D^2\arctan x=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\tag{2}$$

In der erwähnten Studie wurden die dritte Ableitung direkt berechnet

$$D^3\arctan x=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\tag{3}$$

Die Auswertung der Behauptung ergibt folgendes:

Fall n=0
In diesem Fall lässt sich die Behauptung nicht auswerten, weil im Zähler der rechten Seite vor beiden Termen die Zahl 0 steht.

Als nächstes haben die Verfasser der Studie die Behauptung mit Hilfe von Matlab ausgewertet. Sie kommen zu folgenden Ergebnissen

Fall $n = 1$

$$D^2 \arctan x = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \tag{4}$$

Gleichung (4) ist identisch mit (2).

Fall $n = 2$

$$D^3 \arctan x = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3} \tag{5}$$

Gleichung (5) ist identisch mit (3).

Schlussfolgerung:

Die dargestellten Untersuchungen lassen es als plausibel erscheinen, dass Formel (D-55) korrekt ist. Das stellt allerdings keinen mathematischen Beweis sondern nur eine Vermutung dar.

Formel (D-57):

Behauptung:

$$D^{n+1} \arctan x = -\frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^n}} \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)$$

Dies lässt sich kompakter in folgender Form schreiben

$$D^{n+1} \arctan x = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^n}} \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)$$

Jedoch haben die Verfasser der am Anfang des Kommentars zu (D-56) erwähnten Studie gezeigt, dass es richtig heißen muss

$$D^{n} \arctan x = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^n}} \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)$$

Analyse

Die Auswertung mit Matlab hat für die drei Fälle $n=1$, $n=2$ und $n=3$ die analytisch berechneten Formeln (1), (2) und (3) ergeben.

Schlussfolgerung:

Die dargestellten Untersuchungen lassen es als plausibel erscheinen, dass Formel (D-55) korrekt ist. Das stellt allerdings keinen mathematischen Beweis sondern nur eine Vermutung dar.

Formel (D-58): »Bronstein«, S. 411, (6.46a)

Bemerkung:

Als nächstes werden die Formeln (D-60) behandelt, weil sich (D-59) als Spezialfall aus $(\text{D-60})_2$ herleiten lässt.

Formel $(\text{D-60})_1$:

Behauptung:

In der Behauptung wird die Schreibweise vereinfacht, indem Musils Koeffizienten $(n)_0, (n)_1, \ldots$ ersetzt werden durch $n_0, n_1, \ldots$.

$$d^n z = n_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + n_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + n_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots$$

In der Behauptung sind die Koeffizienten $n_0, n_1, \ldots$ unbestimmt, so dass sich die Behauptung nicht auswerten lässt. Jedoch lassen sich diese Koeffizienten aus $(\text{D-60})_2$ bestimmen.

Formel $(\text{D-60})_2$:

Behauptung:

$$d^n z = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy \right)^n \partial^n z$$

Analyse

In der von Musil angegebenen Form ist die Formel falsch. Richtig lautet sie nach »Bronstein«, S. 412, (6.47)

$$d^n z = \left(\frac{1}{\partial x^n} dx + \frac{1}{\partial y^n} dy \right)^n z \tag{1}$$

Gleichung (1) lässt sich mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes »Bronstein«, S. 12, (1.36b) auswerten. Er lautet

$$\left(a+b\right)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \tag{2}$$

Werden die Größen a und b mit den Operatoren $\partial / \partial^n x$ und $\partial / \partial^n y$ identifiziert, so folgt aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} d^n z = {} & \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + n\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} dx^{n-1}dy + \binom{n}{2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2} dx^{n-2}dy^2 \\ & + \binom{n}{3}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3} dx^{n-3}dy^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}} dxdy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Vergleich von (3) mit der Behauptung von $(D\text{-}60)_1$ folgen unmittelbar die dort unbestimmten Koeffizienten zu

$$n_0 = 1 \quad n_1 = n \quad n_2 = \binom{n}{n-2} \cdots n_k = \binom{n}{n-k} = \ldots n_{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad n_n = 1 \tag{4}$$

<u>Formel (D-59):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x\partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

<u>Beweis:</u>

Aus (3) und (4) in $(D\text{-}60)_2$ folgt für $n = 3$

$$dz^3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \binom{3}{1}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} dx^2 dy + \binom{3}{2}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} dxdy^2 + \binom{3}{3}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

Nach (AH-3) gilt

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3 \text{ und } \binom{3}{3} = 1$$

Damit ist die Richtigkeit von (D-59) nachgewiesen.

<u>Formel (D-61):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$d^n \mu = \left(\frac{1}{\partial x} + \frac{1}{\partial y} + \frac{1}{\partial z}\right)^n \partial^n \mu$$

<u>Analyse:</u>

In der behaupteten Form ist die Formel falsch. Nach »Bronstein«, S. 412, (6.48) gilt

$$d^n \mu = \left(\frac{1}{\partial x} + \frac{1}{\partial y} + \frac{1}{\partial z} \right)^n \mu$$

Es stellt wohl mehr als einen Flüchtigkeitsfehler dar, dass Musil auf der rechten Seite von (D-61) vor der Variablen μ den Operator ∂^n eingefügt hat. Dies gilt umso mehr, als Musil der gleiche Fehler auch bei der Formel $(D\text{-}60)_2$ unterlaufen ist.